



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

TESIS DOCTORAL

*Geolocalización posnewtoniana, mediante
TDOA-FDOA, de radiotransmisores pasivos
situados en el entorno de la Tierra*

Autor:

Francisco Javier Clares Humbría

Directores:

José M^a Gambí Fernández

Michael M. Tung

Tutor:

José M^a Gambí Fernández

DEPARTAMENTO DE CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES
E INGENIERÍA QUÍMICA

Leganés, Diciembre 2017

TESIS DOCTORAL

GEOLOCALIZACIÓN POSNEWTONIANA, MEDIANTE TDOA-FDOA, DE RADIOTRANSMISORES PASIVOS SITUADOS EN EL ENTORNO DE LA TIERRA

Autor: *Francisco Javier Clares Humbría*

Directores: **José M^a Gambí Fernández**
 Michael M. Tung

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente: (Nombre y apellidos)

Vocal: (Nombre y apellidos)

Secretario: (Nombre y apellidos)

Calificación:

Leganés, 13 de Diciembre de 2017

*A la memoria de mi padre,
que me enseñó a amar la Ciencia.*

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mi director, el profesor don José María Gambí, por aceptarme para la realización de esta tesis y por acogerme en su equipo de trabajo. Recuerdo sus calurosas palabras de bienvenida. Quiero agradecer su labor, también, a mi codirector, el profesor don Michael Tung. Su ayuda y sus mensajes de ánimo no han faltado nunca.

Al profesor don Manuel Carretero su ayuda al principio y al final de esta andadura académica y su paciencia al haber tenido que soportar las muchas y largas mañanas de trabajo, ajenas a él, en el despacho común. Al profesor don Héctor Pijeira, buen amigo, por su sabiduría y magia con \LaTeX y mi versión arcaica de *WinEdt*.

He tenido, además, la gran suerte de estar rodeado de dos grandes divulgadoras de las Matemáticas, las profesoras doña M^a Luisa García del Pino y doña M^a Carmen Rodríguez Teijeiro. La primera, inagotable trabajadora, no falla una en los desarrollos matemáticos. La segunda, gran entusiasta, fenomenal impartiendo una *clase de campo*. Las dos me precedieron en este lugar y me han ayudado a salvar más de un escollo.

Y, como no, les debo a mi familia el apoyo y la comprensión que me han dado constantemente, en estos años, para que esto saliera adelante: a mi mujer, Cati, que más de una vez me rebajó de todo servicio doméstico para que yo trabajase sin distracción; a mis hijos, Alberto y Luis, aunque a veces me hayan implicado en alguna de sus batallas, escolares y campales. Agradecimiento eterno a mi padre, maestro de maestros, entre ellos de mi director-tutor; y a mi madre, que siempre se preocupó por nuestra educación y aún lo sigue haciendo.

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	1
1. El problema de la geolocalización	3
1.1. Descripción	3
1.2. La técnica TDOA	4
1.3. La técnica FDOA	7
1.4. La técnica TDOA-FDOA	10
1.5. Elección del método	12
1.6. Resumen	15
2. La función de universo	17
2.1. Definición	17
2.2. Propiedades	21
2.3. Las funciones de universo para el entorno de la Tierra	30
2.4. La ecuación del tiempo	35
2.5. Resumen	37
3. Geolocalización mediante TDOA-FDOA	39
3.1. Planteamiento general	39
3.2. Las ecuaciones TDOA	47

3.2.1. Ecuaciones en el modelo minkowskiano	47
3.2.2. Ecuaciones en el modelo posnewtoniano	55
3.2.3. Ejemplo de geolocalización por TDOA	60
3.3. Las ecuaciones FDOA	67
3.3.1. Ecuaciones en el modelo minkowskiano	69
3.3.2. Ecuaciones en el modelo posnewtoniano	74
3.3.3. Ejemplo de geolocalización por FDOA	75
3.4. Resumen	78
4. Simulaciones numéricas	79
5. Conclusiones	155
Apéndice	159
A. Programa en MATLAB	159
Bibliografía	181

Índice de figuras

1.1. Patrón de isócronas para una sola línea de receptores.	6
1.2. Geolocalización TDOA con tres satélites: a) Vista espacial; b) Vista cenital.	7
1.3. Patrón de curvas de isofrecuencia.	8
1.4. Posiciones y ángulos.	9
1.5. Geolocalización mediante curvas TDOA-FDOA.	11
1.6. La intersección de la circunferencia de trazos con la superficie de la Tierra determina dos puntos sobre esta; en uno de ellos se encuentra necesariamente el emisor.	12
1.7. Geolocalización minkowskiana.	14
1.8. Geolocalización posnewtoniana.	15
2.1. La función de universo para el espacio euclídeo E^3	18
2.2. La función de universo en un espacio-tiempo minkowskiano.	19
2.3. Obtención de la función de universo.	21
2.4. Velocidad relativa.	23
2.5. Los ángulos θ_1 y θ_2	31
3.1. Ángulos de la ecuación TDOA en el modelo posnewtoniano	41
3.2. Velocidad relativa \vec{v}_{ST} y su proyección a lo largo de la dirección LOS	44
3.3. Diferencias de distancias minkowskianas y posnewtonianas.	61
3.4. Ángulo θ_1	62
3.5. Ángulo θ_2	63

3.6. Ángulo θ_3	63
3.7. Ángulo θ_4	64
3.8. Ángulo θ_5	64
3.9. Tiempos minkowskianos de llegada de la señal a S_5	65
3.10. Tiempos posnewtonianos de llegada de la señal a S_5	66
3.11. Diferencias entre tiempos minkowskianos y posnewtonianos de llegada de la señal a S_5	67
3.12. Proyecciones de \vec{v}_{S_1T} y \vec{v}_{S_2T} en las respectivas direcciones LOS (en rojo).	68
3.13. Los receptores S_1 y S_2 se encuentran a un mismo lado de la recta que une el origen ECI con el punto donde se halla el transmisor. De nuevo se indican en rojo las proyecciones de \vec{v}_{S_1T} y \vec{v}_{S_2T} en las respectivas direcciones LOS	69
3.14. Radiotransmisor T y satélite S_i en el plano ecuatorial	72
3.15. Diferencias entre velocidades minkowskianas y posnewtonianas de los radiotransmisores en los instantes de emisión.	76
3.16. Ángulos entre velocidades minkowskianas y posnewtonianas.	77
3.17. Diferencias de frecuencias minkowskianas y posnewtonianas.	77

Introducción

La geolocalización de objetos que emiten señales electromagnéticas desde la superficie de la Tierra o desde el espacio exterior es una tarea habitual en nuestros días. Su importancia hace que esta actividad forme parte, cada vez con mayor frecuencia, de la actualidad tecnológica. Aunque la variedad de radiotransmisores es muy grande, en esta tesis nos ocupamos únicamente de los emisores pasivos, es decir, de aquellos que no cooperan, que no facilitan datos para su localización. Esta característica, por sí sola, delimita los métodos de geolocalización que se deben emplear.

El avance en las técnicas de geolocalización, como sucede en las utilizadas en Geodesia y Navegación, viene determinado por la eficiencia, que se traduce en el aumento de la precisión y en la reducción de los tiempos de operación, unidos a la evaluación del coste. Encaminadas a la mejora de la precisión se están incluyendo correcciones relativistas en todas estas disciplinas, que están dando como resultado sistemas más fiables y robustos ([1], [2], [3]). Algunas investigaciones se dirigen a complementar las correcciones características de la Relatividad Especial sobre las mediciones de los tiempos con las de la Relatividad General, que son las que permiten incluir los efectos debidos a los campos gravitatorios. Esto es lo que hacemos aquí mediante la aproximación posnewtoniana del campo gravitatorio terrestre.

En este trabajo se propone, pues, un método de geolocalización mediante el uso de satélites artificiales, que no se limita solamente a determinar posiciones de emisores sino que además permite hallar sus velocidades, en dos marcos relativistas, el minowskiano y el posnewtoniano. La comparación de los resultados proporcionados en uno y otro revelará la importancia de las correcciones posnewtonianas.

La herramienta que se utiliza para llevar a cabo los desarrollos matemáticos en ambos modelos es una función bipuntual, quizá la más importante de todas: la función de universo. Esta función fue introducida por Ruse en el Cálculo Tensorial, aunque se debe a Synge el papel que tiene en Relatividad [4], por lo que también es conocida como la función de universo de Synge [5]. Su importancia reside en que proporciona la medida de la distancia espacio-temporal entre dos sucesos unidos

por una geodésica, supuesta única, de ahí que en un principio se le diera el nombre de *función distancia* o *función característica* ([6], [7], [8]).

Para dos sucesos de un espacio-tiempo cualquiera el valor de la función de universo no cambia bajo transformaciones de coordenadas en cada uno de ellos. Es, por tanto, un invariante bipuntual. Además es analítica y, a diferencia de lo que ocurriría en el espacio euclídeo, donde dependería de las tres más tres coordenadas de dos posiciones, en el espacio-tiempo terrestre es función de las ocho coordenadas de cada par de sucesos considerados [9].

Nuestro enfoque sitúa, por tanto, la emisión y recepción de una señal electromagnética como sucesos de un espacio-tiempo unidos por una geodésica nula. Calculando la función de universo para el espacio-tiempo que rodea a la Tierra en las dos aproximaciones, minkowskiana y posnewtoniana, se obtienen las ecuaciones de geolocalización que, de esta manera, resultan covariantes [10].

La tesis se organiza de la siguiente manera: en el capítulo uno se aborda el problema de la geolocalización de un radiotransmisor pasivo. Se describen las técnicas más avanzadas y se justifica la elección del método seguido. En el capítulo dos, se introduce de modo riguroso la función de universo de Synge, a partir de la cual se deducen las ecuaciones de geolocalización en los dos modelos de espacio-tiempo considerados. Se obtiene, asimismo, la ecuación del tiempo. Sigue el capítulo tres, donde se propone el método de geolocalización basado en la técnica TDOA-FDOA; se derivan las ecuaciones TDOA y FDOA minkowskianas y posnewtonianas y se estudian los sistemas de ecuaciones para obtener solución única. Estas secciones finalizan con sendos ejemplos numéricos. En el capítulo cuatro se muestran simulaciones numéricas seleccionadas de un amplio número de geolocalizaciones globales. Por último, el capítulo cinco está dedicado a las conclusiones y perspectivas de investigación futura.

Queremos, finalmente, señalar que los términos *radiotransmisor*, *transmisor* y *emisor* se utilizan indistintamente a lo largo de esta memoria.

Capítulo 1

El problema de la geolocalización

1.1. Descripción

En esta tesis se propone un método de geolocalización de radiotransmisores pasivos por medio de satélites artificiales terrestres. El método proporciona gran precisión, mediante soluciones únicas y permite localizar transmisores que se hallan en la superficie de la Tierra u orbitando en el espacio exterior. Se desprende de ello que la actuación no se limita a situaciones que requieren que el objeto esté en reposo. Las dos características fundamentales del método, unicidad y precisión, se deben por un lado a que los datos que se utilizan son combinaciones de mediciones TDOA y FDOA¹; por otro, a la utilización no exclusiva de satélites geoestacionarios y, por último, a que las ecuaciones TDOA-FDOA minkowskianas, es decir clásicas, se pueden sustituir en tiempo real por las que corresponden a la aproximación posnewtoniana del campo de Schwarzschild para el entorno de la Tierra [11].

El concepto de geolocalización ha evolucionado a lo largo de los años de manera acorde con el desarrollo de las técnicas: si bien en un principio la geolocalización hacía referencia únicamente al proceso de determinación de las posiciones de transmisores fijos en la superficie terrestre, en la actualidad el término engloba los diversos procesos de identificación espacio-temporal que proporcionan, en tiempo real, las posiciones de los radiotransmisores, sus velocidades y las radiofrecuencias de emisión en los instantes en que se emite la señal [12].

¹Son las siglas de las técnicas de geolocalización, que vamos a describir seguidamente: TDOA significa *Time Difference of Arrival* y FDOA, *Frequency Difference of Arrival*.

Dadas las crecientes necesidades de globalización, los receptores más utilizados se sitúan en el espacio exterior. Esto está permitiendo la incorporación de tecnología espacial para incrementar la precisión, como la que posibilita que sean los propios receptores los que determinen sus efemérides mediante GPS [13]. De esta forma los tiempos propios de los receptores incluyen las correcciones posnewtonianas que les corresponden, al igual que sucede en Navegación [14].

La geolocalización tiene importantes aplicaciones prácticas, tanto civiles como militares: se utiliza en el seguimiento de animales salvajes, en operaciones de búsqueda y rescate de personas, aviones y buques en alta mar, en la localización de teléfonos móviles y de vehículos, en la detección de sistemas que interfieren las comunicaciones, así como para mejorar los sistemas de transporte inteligente y de vigilancia aérea, terrestre y marítima.

Las técnicas de geolocalización más avanzadas son: 1) la técnica TOA, *Time of Arrival*, que mide el tiempo que tarda una señal desde el instante de su emisión hasta el de recepción; esta técnica requiere, por tanto, que el emisor coopere; 2) la técnica TDOA, *Time Difference of Arrival*, con la que se calcula la diferencia de tiempos de llegada de la señal a receptores suficientemente separados, para determinar la posición del emisor; 3) la técnica FDOA, *Frequency Difference of Arrival*, la cual requiere que exista movimiento relativo entre el emisor y, al menos, uno de los receptores. 4) La combinación de estas dos últimas, denominada TDOA-FDOA, es una técnica de precisión en la que la posición del emisor viene dada, como se verá a continuación, a partir de la intersección de superficies o, en su caso, curvas que se obtienen de las ecuaciones algebraicas que resultan.

De todas ellas, la técnica TDOA-FDOA es la que permite alcanzar mayor precisión [15]. Este aspecto y su versatilidad para determinar posiciones, velocidades y frecuencias de emisión nos llevan a elegirla para el método de geolocalización que se propone.

1.2. La técnica TDOA

El método más sencillo de geolocalización mediante TDOA que se utiliza en la actualidad usa tres receptores para localizar emisores pasivos que, se sabe, están en reposo en una pequeña región de la superficie de la Tierra ([15], [16]). Los receptores se sitúan en la propia región, lo que confiere a la localización el carácter de local. Se asume la Tierra esférica y una estructura minkowskiana del espacio-tiempo en este entorno. Comenzamos describiendo el método haciendo uso, únicamente, de dos receptores:

Sean (x, y, z) las coordenadas del emisor en el sistema ECI (Earth Centered Inertial), en el instante t de emisión de una señal, y sean (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) las coordenadas de dos receptores, 1 y 2, en los respectivos instantes de recepción, t_1 , t_2 . La correspondiente ecuación TDOA, que se obtiene del principio de constancia e igualdad de la velocidad c de las señales electromagnéticas en el vacío, es

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}{c} \\ &- \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}}{c}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

siendo $t_1 - t_2$ la medida de la diferencia de tiempos de llegada de la señal a los receptores 1 y 2, y donde se ha tomado $c = 1$. La igualdad (1.2.1) es la ecuación de un hiperboloide, en cuyos focos se encuentran los receptores [17]. Para un valor dado de $t_1 - t_2$, el emisor está en algún punto sobre una de las hojas del hiperboloide. Evidentemente, la rama del hiperboloide viene determinada por el signo de la diferencia $t_1 - t_2$ ([18], [19]).

Cuando se utiliza un tercer receptor se obtienen nuevas ecuaciones TDOA que resultan en nuevos hiperboloides, al formarse líneas de receptores con los ya existentes 1 y 2. Puesto que la región de interés es pequeña, se aproxima por el plano tangente a la esfera terrestre, determinado por la proyección ortogonal sobre esta del baricentro del triángulo que forman los tres receptores. De esta manera, se trabaja con las proyecciones de todos los objetos sobre el plano [20]. Los hiperboloides conforman hipérbolas en el plano tangente, de forma que para distintos valores de una diferencia de tiempos dada, digamos $t_1 - t_2$, se obtienen distintas hipérbolas, denominadas *isócronas* [21]. Cada isócrona es una línea infinita de posibles posiciones del emisor. Con el tercer receptor se forma otra línea de receptores que crea un nuevo patrón de isócronas. La intersección de estas con las primeras permite determinar la posición del emisor. En la figura 1.1 se muestran diferentes isócronas para una única línea de receptores.

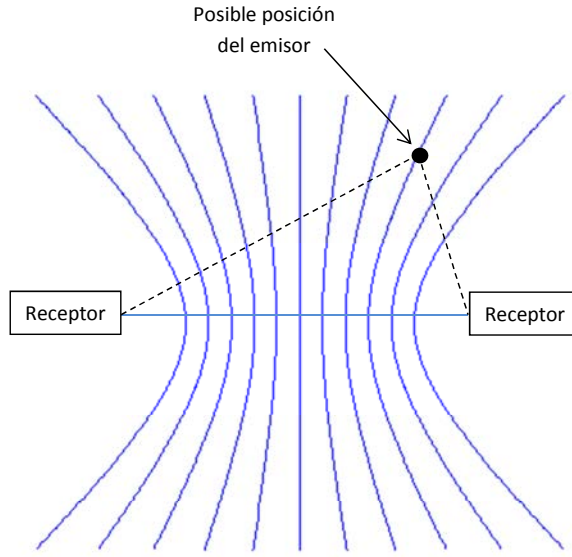


Figura 1.1 – Patrón de isócronas para una sola línea de receptores.

La precisión que se alcanza con este método no es muy elevada debido a las hipótesis geométricas utilizadas, que son las que han permitido reducir el número de incógnitas a dos, las coordenadas del emisor en el plano, y obtener ecuaciones más sencillas.

Un método más preciso, destinado asimismo a localizar radiotransmisores que se hallan en reposo sobre la superficie de la Tierra, involucra el uso de tres satélites artificiales. Desaparece, por tanto, la restricción de que los receptores estén en la propia región. Por lo general, alguno de los satélites se encuentra en órbita *cuasi* circular de gran semieje para minimizar, en lo posible, la incertidumbre en la toma de datos, de ahí que entre los más usados estén los geoestacionarios. Este escenario trasciende el ámbito local del método anterior y constituye un sistema de geolocalización global; se usan coordenadas ECI, tanto del emisor como de los satélites aunque la estructura del espacio-tiempo se sigue suponiendo minkowskiana. Las diferencias de tiempos de llegada de la señal emitida a los satélites producen hiperboloides siendo ahora la intersección de estos con la superficie de la Tierra la que proporciona las localizaciones. No obstante, la posición del emisor no se determina unívocamente ya que cuando se utilizan no más de tres satélites aparecen, en general, dos soluciones que solo se pueden discriminar si se conoce *a priori* la región en que se encuentra el radiotransmisor ([12], [22], [30]). La figura 1.2 representa una localización por este método.

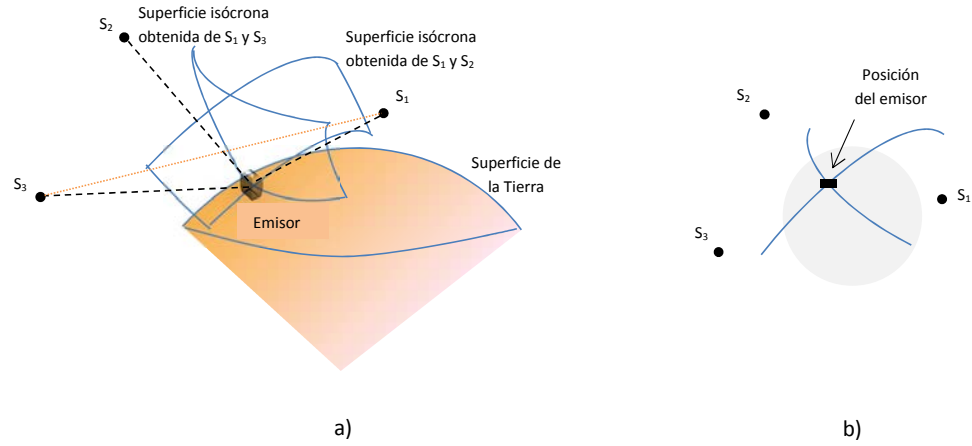


Figura 1.2 – Geolocalización TDOA con tres satélites: a) Vista espacial; b) Vista cenital.

La geolocalización global de un radiotransmisor por TDOA consiste, pues, en utilizar configuraciones de satélites artificiales en número suficiente para que, trabajando en tiempo real, se puedan seleccionar, de entre todos los sistemas de ecuaciones no lineales del tipo (1.2.1), aquellos que permitan disminuir la ambigüedad en la determinación de la posición del transmisor en el momento de emisión de la señal y obtener, además, dicho instante. Estas son las incógnitas que hemos de resolver con la suficiente precisión. A este respecto es importante notar que la precisión es función, como mínimo, del modelo de espacio-tiempo para el entorno terrestre que se utilice.

1.3. La técnica FDOA

Las mediciones FDOA se usan para hallar la posición de emisores pasivos, particularmente en escenarios locales [15]. FDOA es la medida de la diferencia de frecuencias de recepción de una señal registrada por dos receptores separados espacialmente, de los cuales al menos uno se encuentra en movimiento con respecto al emisor. Como ocurre con la técnica TDOA, las mediciones FDOA permiten configurar superficies que ayudan, en algunos casos, a situar posibles posiciones del emisor. Cuando la geolocalización se desarrolla en un escenario local, la intersección de estas superficies con el plano tangente descrito anteriormente da lugar a

curvas formadas por puntos con los mismos valores de diferencias de frecuencias, que reciben por ello el nombre de *curvas de isofrecuencia* (figura 1.3).

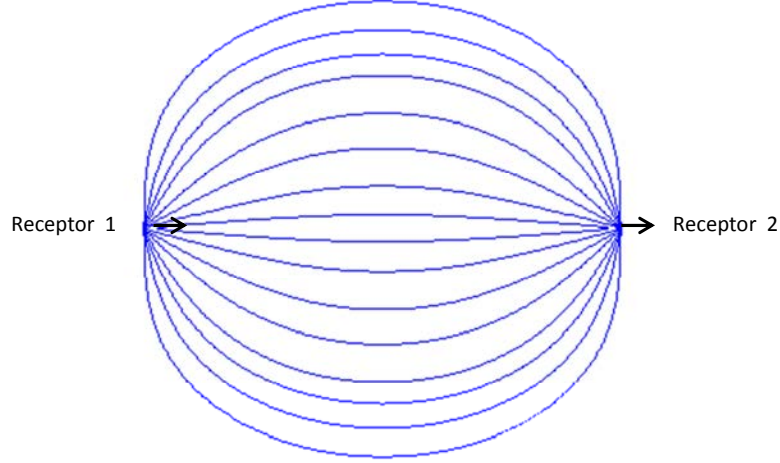


Figura 1.3 – Patrón de curvas de isofrecuencia.

La relación entre la frecuencia de recepción de una señal y la frecuencia emitida por un radiotransmisor viene dada por el efecto Doppler, de ahí que la técnica FDOA sea también conocida como *Differential Doppler* y las curvas de isofrecuencia, como *isodoppler* ([23], [24], [25]).

Sea \vec{r}_T el vector de posición de un transmisor respecto de un sistema de coordenadas ECI y sea f_T la frecuencia de la señal emitida por él. Sean \vec{r}_1 y \vec{r}_2 los vectores de posición de dos receptores 1 y 2, en este sistema. Designemos por f_1 y f_2 las frecuencias de recepción de la señal para 1 y 2, respectivamente. Entonces, la ecuación FDOA para el modelo minkowskiano es [26]:

$$f_1 - f_2 = -f_T \left[(\vec{v}_1 - \vec{v}_T) \cdot \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_T)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_T|} - (\vec{v}_2 - \vec{v}_T) \cdot \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_T)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_T|} \right], \quad (1.3.1)$$

donde \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son las velocidades de 1 y 2 en los respectivos instantes de recepción.

Consideremos el caso más simple en el que el transmisor está en reposo, $\vec{v}_T = 0$, y los receptores se mueven en la misma dirección y con igual valor de la velocidad, es decir, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$. La ecuación (1.3.1) se reduce a

$$f_1 - f_2 = -f_T (\vec{v} \cdot \vec{u}_1 - \vec{v} \cdot \vec{u}_2),$$

siendo $\vec{u}_i = \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_T)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_T|}$, ($i = 1, 2$), el vector unitario en la dirección de la recta que une la posición del transmisor, en el instante de emisión, con la del receptor i , en el instante de recepción.

La diferencia de frecuencias se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_1 - f_2 = -f_T (v \cos \theta_1 - v \cos \theta_2) \\ &= f_T v (\cos \theta_2 - \cos \theta_1), \end{aligned}$$

donde θ_i es el ángulo formado por \vec{v} y \vec{u}_i , $i = 1, 2$.

Agrupando las constantes en un solo miembro, queda

$$\cos \theta_2 - \cos \theta_1 = K \quad (1.3.2)$$

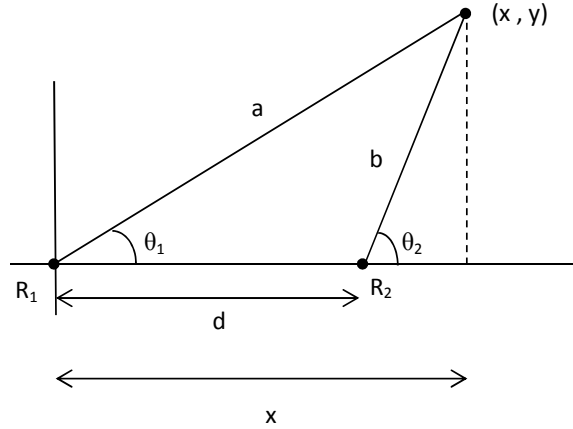


Figura 1.4 – Posiciones y ángulos.

De la figura 1.4, se obtiene

$$\cos \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{x - d}{b} = \frac{x - d}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2}}$$

La ecuación (1.3.2) pasa a ser

$$\frac{x - d}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = K$$

Esta relación permite dar valores a los pares (x, y) para obtener los puntos de distintas curvas de isofrecuencia, en esta situación particular. Las curvas de la figura 1.3 se han dibujado tomando valores de K comprendidos entre 1 y 2, con $d = 10$.

Al utilizar un tercer receptor se dispone de varias líneas de receptores, de forma que cada una registra sus correspondientes mediciones FDOA, con lo que se obtienen varias curvas de isofrecuencia que, al intersectarse, proporcionan la posición del transmisor.

Las curvas de isofrecuencia, instrumento clave en el desarrollo operativo cuando se trabaja en escenarios locales son, por supuesto, proyecciones sobre el plano de interés de superficies con idénticos valores de diferencias Doppler. En el ámbito de una geolocalización global por FDOA se busca la intersección de estas con la superficie de la Tierra. Las superficies de isofrecuencia son de especial relevancia en la técnica TDOA-FDOA, como se verá en la siguiente sección.

Se muestra, así, el paralelismo existente entre los métodos TDOA y FDOA: ambos pueden desarrollarse en escenarios locales y globales. Las ecuaciones obtenidas con cada método generan *equisuperficies* que permiten situar posibles posiciones del emisor, cuya localización puede llegar a determinarse unívocamente mediante intersecciones con otras superficies o con los planos que se determinen pertinentes para cada situación.

1.4. La técnica TDOA-FDOA

Esta técnica aúna las ventajas de las dos individuales que combina, complementando las características de una y otra. Tanto TDOA como FDOA son técnicas de precisión que al ser utilizadas conjuntamente dan como resultado el aumento de la

misma en la determinación de la posición del emisor, incluso rebajando el número de receptores a dos.

Dos únicos receptores destinados a realizar ambas operaciones TDOA y FDOA proporcionan medidas que, introducidas en las ecuaciones (1.2.1) y (1.3.1), permiten resolverlas simultáneamente. Si ambos se encuentran situados en la misma latitud, las curvas isócronas, o hipérbolas TDOA, se orientan en dirección Norte-Sur y las curvas de isofrecuencia, que resultan de las ecuaciones FDOA, lo hacen en dirección Este-Oeste ([15], [22]). En la figura 1.5 se representan estas curvas para diferentes valores TDOA y FDOA, registrados por receptores que se mueven en la misma latitud, con la misma dirección e igual velocidad. Para valores determinados de TDOA y FDOA la intersección de las correspondientes curvas señala la posición del emisor, con mayor precisión que la que se obtiene en los casos estudiados anteriormente ya que las curvas se cortan cuasi ortogonalmente ([27]). Sin embargo, sigue habiendo ambigüedad en la determinación porque existen dos puntos de intersección. Por lo tanto, en esta situación también se necesita información adicional para hallar la posición del transmisor.

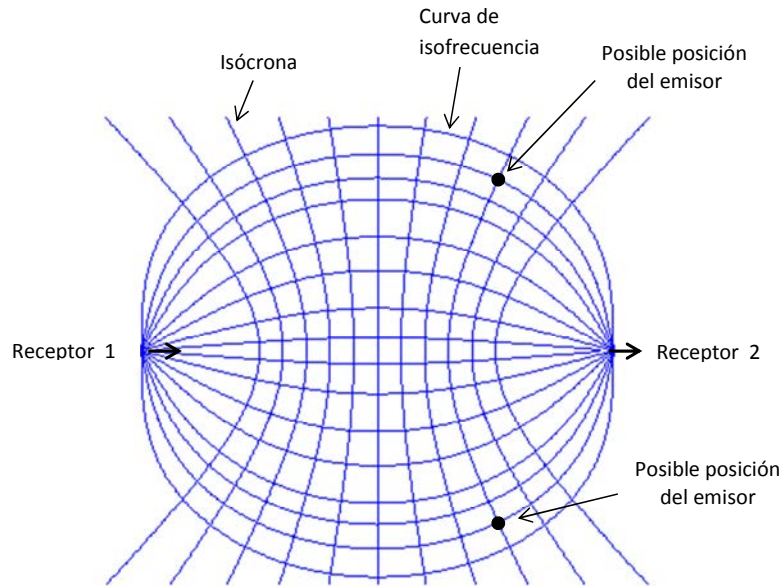


Figura 1.5 – Geolocalización mediante curvas TDOA-FDOA.

En un escenario global, podemos asimismo llevar a cabo mediciones combinadas TDOA-FDOA, mediante dos únicos receptores, para localizar un radiotransmisor

que se halla en reposo sobre la superficie de la Tierra. Se obtienen, en este caso, hiperboloides de igual TDOA y superficies con los mismos valores de FDOA que se intersecan formando circunferencias en el espacio, cuyos puntos de contacto con la superficie terrestre marcan las dos posibles posiciones del emisor. La situación se ilustra en la figura 1.6.

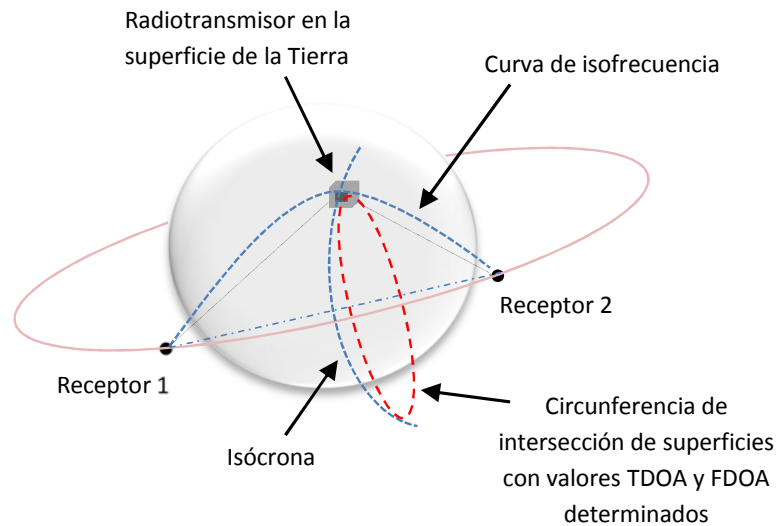


Figura 1.6 – *La intersección de la circunferencia de trazos con la superficie de la Tierra determina dos puntos sobre esta; en uno de ellos se encuentra necesariamente el emisor.*

1.5. Elección del método

Un estudio exhaustivo de las diferentes técnicas de geolocalización se puede encontrar en diversas referencias ([28], [29]). En la evolución de estas técnicas se han ido aprovechando las ventajas y salvando los inconvenientes que cada una muestra en las situaciones en que se utiliza; se han creado técnicas híbridas según las características del escenario en que se desarrollan. Todo ello ha conformado un panorama, ciertamente, muy amplio. Sin embargo, los métodos más usados en la actualidad, tanto en el ámbito civil como en el militar, utilizan la técnica TDOA-FDOA cuando se requiere una gran precisión: las combinaciones apropiadas de mediciones TDOA y FDOA proporcionan geolocalizaciones muy precisas en pocos segundos, siempre que se adopte la geometría de los sistemas de receptores adecuada a cada emisor.

Esta geometría es función de las características de la señal emitida, de la precisión requerida para hallar la posición del emisor y de la calidad de la sincronización de los relojes a bordo de los receptores. Estas variables actúan, por tanto, como fuentes de error ([29]).

De lo anterior podemos concluir lo siguiente:

- 1) Para evitar la ambigüedad en la localización mediante TDOA de las posiciones de emisores que no cooperan, hacen falta al menos tres receptores, en particular tres satélites, si se quiere minimizar los errores asociados a las variables antes mencionadas.
- 2) Las mediciones FDOA, si bien son un excelente complemento de las medidas TDOA para localizar posiciones de transmisores en reposo, también se pueden usar para calcular velocidades y frecuencias de emisión de radiotransmisores en movimiento, a fin de obtener los datos necesarios para su posterior seguimiento (*tracking*), especialmente cuando están orbitando en el espacio exterior.
- 3) Para poder realizar mediciones FDOA con este fin es necesario disponer previamente de los datos TDOA para obtener las posiciones de los emisores.

Entre las propuestas más eficientes que conocemos para determinar las posiciones ECI mediante la técnica TDOA, utilizando satélites artificiales, están la de Ho y Chan ([12]), con la que se localizan emisores situados sobre la superficie de la Tierra, y la de Gambi y otros, que se usa preferiblemente para localizar radiotransmisores en el espacio exterior ([30]). Con el método propuesto en [12] se calculan las posiciones así como los instantes de emisión, excepto por las terceras coordenadas ECI, mediante tres satélites en posiciones nominales geoestacionarias correspondientes a una tierra esférica; las terceras coordenadas son en este método las que indican el hemisferio terrestre en que se encuentra el emisor. Por su parte, con el método propuesto en [30] se determinan unívocamente las tres coordenadas ECI de posición y los instantes de emisión, utilizando cinco satélites, no todos ecuatoriales y, por ello, no todos geoestacionarios. En términos de eficiencia cada una tiene sus ventajas e inconvenientes. Ahora bien, puesto que para poder hallar las velocidades y las frecuencias de emisión, con ecuaciones FDOA, es necesario el uso de al menos cinco satélites, resulta que utilizando tres geoestacionarios y dos LEO, no ecuatoriales, se pueden aprovechar las ventajas que ofrece cada uno de estos dos métodos ². Así, por ejemplo, se pueden destinar los tres satélites geoestacionarios para localizar mediante TDOA radiotransmisores sobre la superficie de la Tierra, de acuerdo con el método de Ho y Chan, y cinco satélites para localizar mediante TDOA radio-

²Durante el desarrollo de esta tesis se revelará la necesidad de incluir estos cinco satélites para hallar la velocidad del emisor mediante mediciones FDOA.

transmisores en el espacio exterior, con el método de Gambi. Además, se puede aumentar la precisión de manera natural utilizando las respectivas versiones posnewtonianas. En particular, se puede incrementar la precisión que actualmente se alcanza con los métodos estándar en el cálculo de las posiciones de transmisores que orbitan alrededor de la Tierra, añadiendo a la versión posnewtoniana de las localizaciones mediante TDOA, desarrollada en [30], el procedimiento para determinar las velocidades y las frecuencias de emisión que se propone en el capítulo tres.

El método que se desarrolla en esta tesis se adapta bien a las necesidades actuales de geolocalización porque la variedad de satélites con diferentes elementos orbitales a disposición es tan grande que se pueden elegir los satélites apropiados, en relación con las órbitas que describen, a fin de minimizar los errores asociados a las geometrías de los sistemas que se forman. Además, escogidos convenientemente, se puede dar cuenta de muchos de los aspectos generales relativos a la precisión, a los cuales nos hemos referido anteriormente.

Para alcanzar la concordancia de precisiones, la herramienta que se utiliza para deducir las ecuaciones FDOA, tanto newtonianas como posnewtonianas, es la misma con la que se obtienen las ecuaciones TDOA en [30], a saber, la función de universo de Synge correspondiente al espacio de Minkowski y a la aproximación posnewtoniana del campo de Schwarzschild para el entorno de la Tierra, que se estudia en el siguiente capítulo.

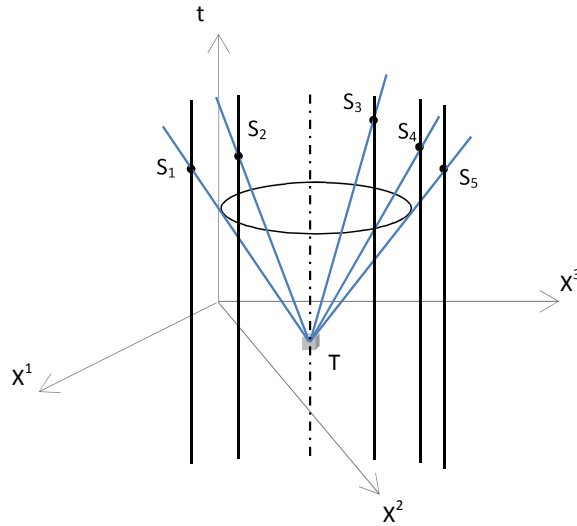


Figura 1.7 – Geolocalización *minkowskiana*.

En las figuras 1.7 y 1.8 se representan los sucesos de emisión y de recepción de una señal electromagnética, en los dos espacio-tiempos cuadridimensionales a los que nos acabamos de referir. Las figuras incluyen las líneas de universo del radiotransmisor y de los satélites receptores de la señal emitida. Cada suceso tiene su propio cono de luz y este es una superficie invariante para cada suceso del espacio-tiempo ([31], [32]). De esta manera, los sucesos de emisión y recepción quedan unívocamente determinados por sus coordenadas espacio-temporales: (x_T^α, x_T^4) para el transmisor y $(x_{S_i}^\alpha, x_{S_i}^4)$ para el receptor i . El suceso de emisión se encuentra en el vértice del cono de luz y los sucesos de recepción se hallan en distintos puntos de su superficie, como corresponde a eventos conectados por una señal electromagnética. En el modelo minkowskiano, figura 1.7, las líneas de universo son rectas en el espacio-tiempo plano de la Relatividad Especial, así como las líneas que conectan el suceso de emisión con los distintos sucesos de recepción sobre la superficie del cono de luz. En cambio, en el modelo posnewtoniano, figura 1.8, las líneas se curvan por efecto de las masas, lo que también sucede en la superficie del cono nulo: es el espacio-tiempo curvo de la Relatividad General.

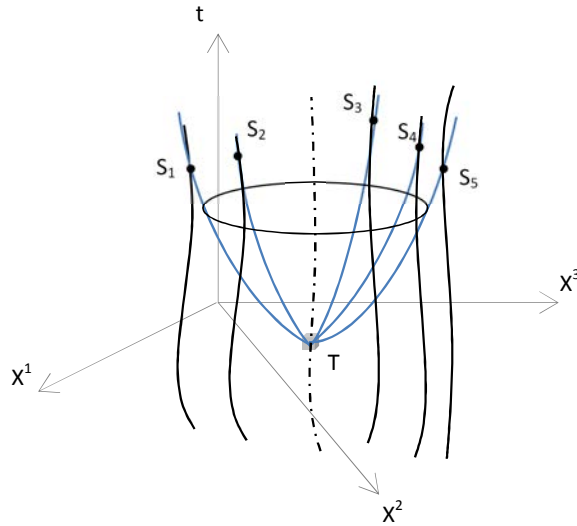


Figura 1.8 – Geolocalización posnewtoniana.

1.6. Resumen

El concepto de geolocalización engloba una serie de procesos que no solo abarcan la localización espacial de un emisor, sino lo que se podría llamar, en lenguaje

figurado, la radiografía instantánea de un objeto, móvil o estacionario, que emite una señal electromagnética. Por tanto, es una caracterización espacio-temporal de un radiotransmisor que comprende, además, el instante de emisión, la determinación de su velocidad en dicho instante y la frecuencia de emisión.

Las técnicas actuales que se utilizan para ello son de gran precisión, muy potentes, que funcionan muy bien en escenarios locales sobre la superficie de la Tierra. Una de las más usadas es TDOA, la cual obtiene la posición del emisor en el instante de emisión a partir de la diferencia de los tiempos de llegada de la señal a dos receptores. La relación matemática que conecta instantes y posiciones es la ecuación de un hiperboloide. La proyección ortogonal de estas superficies sobre un plano determina una hipérbola formada por puntos con igual diferencia de tiempos, o isócrona. En los casos más sencillos, la operación se puede llevar a cabo con tres receptores formando dos líneas de recepción o *baselines*. El cruce de hipérbolas en el plano determina geoméricamente la posición del transmisor.

Una técnica pareja en importancia y precisión, susceptible asimismo de aplicación geométrica, es FDOA, que opera a partir de la diferencia de frecuencias de recepción registradas por receptores en movimiento relativo al emisor. Se basa en el efecto Doppler. De las ecuaciones que resultan se obtienen superficies de puntos con la misma diferencia de frecuencias. En un escenario local, la intersección de estas superficies con un plano da lugar a las curvas de isofrecuencia.

Por supuesto, ambas técnicas son igualmente válidas en un escenario global aunque su aplicación geométrica no resulta tan sencilla. En este caso se consideran los puntos de intersección con la superficie terrestre cuando el transmisor se encuentra sobre esta.

La técnica conjunta TDOA-FDOA combina la potencia de ambas técnicas individuales y permite utilizar la intersección de las superficies generadas en cada una de ellas para la localización de emisores que se hallan sobre la superficie de la Tierra. Se elige esta técnica dual para el modelo de geolocalización que aquí se propone porque la combinación de mediciones TDOA-FDOA aporta las características de precisión y unicidad que este requiere. Para poder determinar la velocidad y frecuencia de emisión por medio de FDOA, en tiempo real, se necesita que TDOA aporte los datos de posición de los emisores. La geolocalización de un radiotransmisor que orbita en el espacio alrededor de la Tierra se puede llevar a cabo con esta técnica en los dos modelos relativistas, minkowskiano y posnewtoniano, considerados.

Capítulo 2

La función de universo

2.1. Definición

La función de universo de Synge permite unificar las descripciones minkowskiana y posnewtoniana de las mediciones astrométricas que se realizan mediante satélites artificiales. En esta tesis se utiliza para formular los procesos de geolocalización basados en ecuaciones TDOA-FDOA correspondientes a estas dos descripciones.

La bondad de esta función reside, posiblemente, en su simplicidad ya que es, esencialmente, la expresión finita del elemento de línea de cualquier espacio-tiempo ([33], [34], [35], [36]). En efecto, la función de universo correspondiente a un espacio-tiempo dado es, salvo signo, la mitad del cuadrado de la medida de la geodésica única que une cualesquiera dos sucesos de ese espacio-tiempo.

Para introducirla consideremos, primeramente, el espacio euclídeo tridimensional, E^3 , supuesto este el espacio que rodea a la Tierra:

Sean x^{α_1} , x^{α_2} , $\alpha = 1, 2, 3$, las coordenadas cartesianas en E^3 de dos puntos, P_1 , P_2 , ocupados, no necesariamente en el mismo instante, por dos objetos, digamos C_1 , C_2 , que están orbitando alrededor de la Tierra. Entonces, de acuerdo con la definición que acabamos de dar, la función de universo, $\Omega(P_1 P_2)$, para este espacio viene dada por

$$\begin{aligned}\Omega(P_1 P_2) &= \frac{1}{2}[(x^{1_2} - x^{1_1})^2 + (x^{2_2} - x^{2_1})^2 + (x^{3_2} - x^{3_1})^2] \\ &= \frac{1}{2}[(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2],\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

o, escrita en forma compacta

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} \Delta x^\alpha \Delta x^\alpha = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \quad (2.1.2)$$

con $\delta_{\alpha\beta}$ el tensor métrico de E^3 , en coordenadas cartesianas y $\Delta x^\alpha = x^{\alpha 2} - x^{\alpha 1}$.

La característica más importante de $\Omega(P_1 P_2)$ emana, en este caso, del rasgo principal de los espacios euclídeos: puesto que existe una única línea recta que une P_1 y P_2 , se tiene que si dos objetos C_1 y C_2 se mueven a lo largo de caminos suaves, y P_1 y P_2 son puntos ocupados sucesivamente por C_1 y C_2 , entonces $\Omega(P_1 P_2)$ es una función suave, no negativa en este caso, de las tres coordenadas de P_1 y de las tres coordenadas de P_2 , como sugiere la notación. Dicho de otra manera, $\Omega(P_1 P_2)$ es una función escalar bipuntual suave de P_1 y P_2 (figura 2.1).

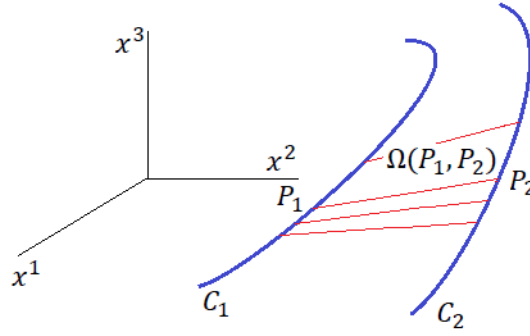


Figura 2.1 – La función de universo para el espacio euclídeo E^3

Consideremos, a continuación, el espacio-tiempo que rodea a la Tierra, supuesto plano, es decir, minkowskiano. Esta es la aproximación en la que se formulan las ecuaciones TDOA-FDOA estándar, las anteriormente vistas ecuaciones (1.2.1) y (1.3.1). A diferencia de la función de universo (2.1.2) del espacio euclídeo, $\Omega(P_1 P_2)$ relaciona ahora sucesos P_1 de C_1 con sucesos P_2 de C_2 del siguiente modo: si $(x^{\alpha 1}, t_1)$ y $(x^{\alpha 2}, t_2)$ son, respectivamente, las coordenadas ECI de P_1 y P_2 , entonces

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - c^2 \Delta t^2), \quad (2.1.3)$$

siendo $\Delta t = (t_2 - t_1)$.¹

Esta función se ilustra en la figura 2.2, donde L_1 representa la línea de universo o trayectoria espacio-temporal de C_1 , y L_2 la línea de universo o trayectoria espacio-temporal de C_2 . Las proyecciones de L_1 y L_2 sobre el espacio determinado por los tres ejes espaciales, en la parte inferior de la figura, representan las trayectorias de C_1 y C_2 en E^3 .

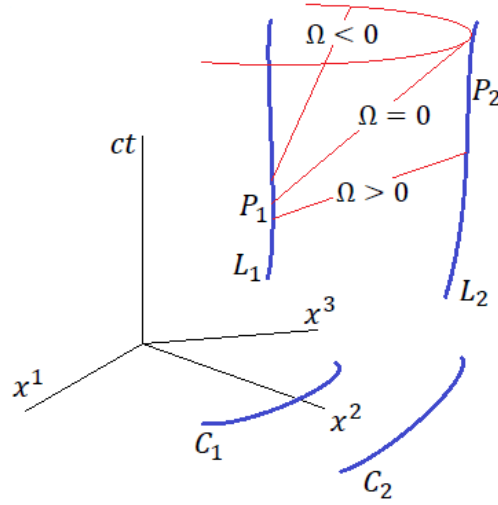


Figura 2.2 – La función de universo en un espacio-tiempo minkowskiano.

La expresión (2.1.3) se puede escribir en forma compacta, introduciendo la cuarta coordenada $x^4 = ct$, de la manera siguiente

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j, \quad (2.1.4)$$

¹El sistema de coordenadas ECI (Earth-Centered Inertial) tiene como origen el centro de masas de la Tierra y sus ejes apuntan hacia direcciones fijas con respecto a las estrellas fijas, por tanto, los ejes no rotan respecto de ellas. No obstante, el origen del sistema gira alrededor del Sol junto con la Tierra, por lo que se encuentra en caída libre en el campo gravitatorio de este. Por consiguiente, el sistema ECI no es completamente inercial, sino que entra en el grupo de los llamados localmente inerciales. En primer orden, el eje X_1 está en la dirección del equinoccio vernal, el plano $X_1 X_2$ coincide con el plano ecuatorial de la Tierra, y el eje X_3 es normal al plano $X_1 X_2$, en la dirección del polo Norte. El sistema de ejes así definido está fijado para la época J2000, ([37], [38]).

El cálculo de las órbitas de los satélites se realiza en este sistema.

donde los índices i, j , varían de 1 a 4, siendo $\Delta x^4 = x^{4_2} - x^{4_1} = c(t_2 - t_1)$, y η_{ij} el tensor métrico del espacio de Minkowski en coordenadas ECI: $\eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha 4} = \eta_{4\alpha} = 0$ y $\eta_{44} = -1$ (de aquí en adelante los índices griegos toman valores de 1 a 3).

Debemos hacer notar que no es el hecho de que la función de universo en (2.1.4) dependa de 4 + 4 coordenadas lo que la distingue de la definida en (2.1.2). La diferencia esencial está en que, contrariamente a lo que sucede en el espacio euclídeo, ahora existen sucesos P_1, P_2 para los cuales $\Omega(P_1 P_2)$ es negativa o cero. De acuerdo con la ecuación (2.1.4), la función de universo será positiva si el vector $\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$ es de tipo espacio, negativa si el vector $\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$ es de tipo tiempo, e igual a cero si $\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$ es un vector nulo (figura 2.2).

De la definición obtenemos que $\Omega(P_1 P_2)$ es cero cuando el tiempo transcurrido entre P_1 y P_2 , multiplicado por c , es igual a la distancia espacial entre los puntos donde ocurren los sucesos P_1 y P_2 . Precisamente, esta es la propiedad más importante para nosotros, puesto que en Geolocalización si P_1 es el suceso de emisión de una señal electromagnética y P_2 el de recepción, entonces $\Omega(P_1 P_2)$ es cero.

En general, para cualquier espacio-tiempo caracterizado por el tensor métrico $g_{ij}(x^k)$, con signatura $(+, +, +, -)$, y para cualesquiera dos sucesos $P_1(x^{k_1}), P_2(x^{k_2})$ para los cuales existe una única geodésica $\Gamma_{P_1 P_2}$ que los une, con ecuaciones $x^k = \xi^k(u)$, donde u es un parámetro afín que toma valores entre 0 y 1, la función de universo, $\Omega(P_1 P_2)$, se define como

$$\Omega(P_1 P_2) = \Omega(x^{k_1}, x^{k_2}) = \frac{1}{2} \int_0^1 g_{ij} U^i U^j du, \quad (2.1.5)$$

con el integrando evaluado a lo largo de $\Gamma_{P_1 P_2}$, donde $x^{k_1} \equiv \xi^k(0)$, $x^{k_2} \equiv \xi^k(1)$ y $U^k = d\xi^k/du$ (figura 2.3).

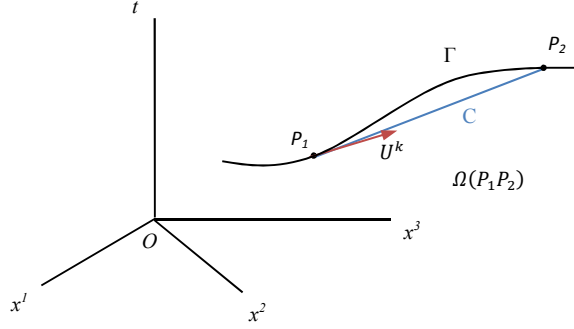


Figura 2.3 – Obtención de la función de universo.

Por tanto, se tiene de (2.1.5) que, independientemente de la forma que adopte $\Omega(P_1P_2)$, en cualquier espacio-tiempo siempre habrá sucesos P_1, P_2 para los cuales $\Omega(P_1P_2) < 0$, otros para los que $\Omega(P_1P_2) > 0$ y, por último, aquellos para los cuales $\Omega(P_1P_2) = 0$. Esto significa que: 1) si $\Omega(P_1P_2) < 0$, entonces puede haber objetos materiales que habiendo experimentado P_1 pueden alcanzar P_2 , siempre que P_2 ocurra más tarde; 2) si $\Omega(P_1P_2) > 0$, ningún objeto es capaz de alcanzar P_2 habiendo experimentado P_1 , y 3) si $\Omega(P_1P_2) = 0$, entonces solo las señales electromagnéticas pueden incluir en sus líneas de universo a P_1 y P_2 .

2.2. Propiedades

Las propiedades de $\Omega(P_1P_2)$ que se utilizan en esta tesis son ([5], [39]): **1ª**. Durante el tiempo en que los objetos C_1 y C_2 se mueven suavemente sobre la superficie de la Tierra o en el espacio exterior, $\Omega(P_1P_2)$ es una función suave de los sucesos $P_1 \in L_1$ y $P_2 \in L_2$, donde L_1, L_2 son las líneas de universo de C_1, C_2 . **2ª**. En este supuesto se pueden definir sin ambigüedad las primeras derivadas parciales de $\Omega(P_1P_2)$, respecto de las coordenadas de P_1 y respecto de las coordenadas de P_2 (siguiendo a Synge, estas derivadas se denotan con simples subíndices y sin la coma habitual). **3ª**. Para métricas cuasi minkowskianas, es decir, para métricas del tipo $g_{ij}(x^k) = \eta_{ij} + \gamma_{ij}(x^k) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, con $\gamma_{ij}(x^k) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, la función de universo tiene la forma

$$\Omega(P_1P_2) = \frac{1}{2}\eta_{ij}\Delta x^i\Delta x^j + \frac{1}{2}\Delta x^i\Delta x^j \int_C \gamma_{ij}d\omega + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (2.2.1)$$

donde $\Delta x^i = x^{i_2} - x^{i_1}$, C es la línea recta $x^i = (1 - \omega)x^{i_1} + \omega x^{i_2}$ ($0 \leq \omega \leq 1$) (figura 2.3) y ε es un pequeño parámetro adimensional tal que ε^2 es del orden de v^2 y de U ($c = G = 1$), siendo v es la velocidad clásica con respecto a la Tierra, característica de los satélites en órbita y U es el potencial newtoniano de los cuerpos del sistema solar, en la vecindad de la Tierra; nótese que el primer término en (2.2.1) corresponde a la función de universo en (2.1.4) y que el segundo término es $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. **4ª.** La función de universo se puede desarrollar en series de potencias alrededor de P_1 y P_2 , con los procedimientos habituales de aproximación, sin abandonar los métodos del Cálculo Tensorial. **5ª.** Los sucesos P_1 y P_2 están unidos por una señal electromagnética si, y solo si, $\Omega(P_1 P_2) = 0$. **6ª.** Los gradientes de $\Omega(P_1 P_2)$ en P_1 y P_2 , es decir $\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}$, son los vectores de posición de P_1 respecto de P_2 y de P_2 respecto de P_1 , respectivamente, y **7ª.** Si f_1 y f_2 son las frecuencias de emisión y recepción de una señal en sucesos consecutivos, P_1 a lo largo de L_1 y P_2 a lo largo de L_2 , respectivamente, entonces el desplazamiento relativo en frecuencias viene dado por

$$\frac{f_1 - f_2}{f_1} = \frac{\Omega_{i_1} A^{i_1} + \Omega_{i_2} A^{i_2}}{\Omega_{j_1} A^{j_1}}, \quad (2.2.2)$$

donde A^{i_1}, A^{i_2} son los vectores unitarios tangentes a las líneas de universo L_1 de C_1 y L_2 de C_2 , en P_1 y P_2 , respectivamente.

La importante ecuación (2.2.2) evidencia el hecho de que la frecuencia medida por un receptor y la frecuencia emitida por un transmisor difieren debido a la velocidad relativa entre ambos y a la diferencia de potencial gravitatorio en sus respectivas posiciones. La parte concerniente al movimiento relativo se conoce habitualmente como efecto Doppler y la gravitatoria es la contribución que aporta la Relatividad General. Es interesante mostrar su deducción, lo que hacemos seguidamente :

Consideremos un emisor, T , cuya línea de universo es L' , que emite una señal electromagnética, y un receptor, R , que la recibe y cuya línea de universo es L (figura 2.4).

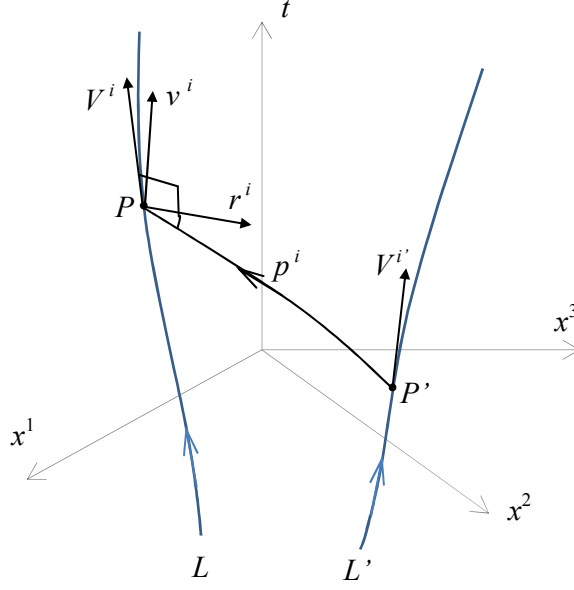


Figura 2.4 – Velocidad relativa.

Adoptando un planteamiento energético supongamos que cada fotón emitido tiene un momento $p^{i'}$, en el sistema de coordenadas del emisor T , y un momento p^i , en el sistema de coordenadas que acompaña a R . El sistema del receptor está caracterizado por una tetrada de vectores ortogonales, $\lambda_{(a)}^i$ ($a = 1, 2, 3, 4$), de manera que los tres vectores espaciales, $\lambda_{(\alpha)}^i$ ($\alpha = 1, 2, 3$), forman una base de vectores unitarios que materializan el sistema de referencia local, y el vector temporal representa la cuadvirvelocidad, V^i , de R , es decir, $\lambda_{(4)}^i = V^i = dx^i/ds$, donde s es el tiempo propio de R . De esta forma, se tiene:

$$\lambda_{(a)}^i \lambda_{i(b)} = \eta_{(ab)}, \quad (2.2.3)$$

donde $\eta_{(ab)} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$.

La velocidad $V^{i'}$ del emisor y la del receptor, V^i , no pueden compararse directamente porque están en diferentes sucesos del espacio-tiempo, P' y P , respectivamente. En su lugar, podemos comparar V^i y el vector v^i que resulta en P por transporte paralelo de $V^{i'}$ a lo largo de la geodésica nula $\Gamma(P'P)$, es decir,

$$v_i = g_{ij'} V^{j'},$$

donde $g_{ij'}$ es el propagador paralelo del espacio-tiempo correspondiente ([5], [40]). Esto significa que lo que R puede medir en P son las proyecciones de v^i sobre $\lambda_{(\alpha)}^i$, esto es,

$$v_{(\alpha)} = v_i \lambda_{(\alpha)}^i,$$

o, dicho de otro modo, las componentes de la velocidad de T con respecto a $\lambda_{(\alpha)}^i$, en P .

Seguidamente, podemos escribir

$$v^i v_i = v^{(\alpha)} v_{(\alpha)} + v^{(4)} v_{(4)}.$$

Como $v^i v_i = V^{i'} V_{i'} = -1$, se tiene

$$v^{(\alpha)} v_{(\alpha)} + v^{(4)} v_{(4)} = -1.$$

Dado que

$$v_{(\alpha)} = v^{(\alpha)}$$

y

$$v_{(4)} = -v^{(4)}$$

se obtiene

$$v^{(\alpha)} v^{(\alpha)} - (v^{(4)})^2 = -1,$$

de donde,

$$(v^{(4)})^2 = 1 + v^{(\alpha)} v^{(\alpha)},$$

y designando al producto $v^{(\alpha)} v^{(\alpha)}$ por v^2 , resulta

$$v^{(4)} = \sqrt{1 + v^2}, \quad (2.2.4)$$

siendo v la velocidad relativa de T y R , medida por R en P .

De la ecuación (2.2.4) vemos que $v^{(4)} = 1$ si, y solo si, todas las componentes v_α son cero. En ese caso, $V^{i'}$ y V^i son paralelas por transporte a lo largo de la geodésica $\Gamma(P'P)$, lo que indica que T está en reposo respecto de R , cuando T es observado por R en P .

Sea ahora r^i un vector unitario en P , ortogonal a la cuatriveicidad del observador, V^i , es decir,

$$r_i V^i = 0, \quad (2.2.5)$$

elegido de manera que descansa en el 2-elemento que contiene al vector V^i tangente a L en P y al vector p_i , tangente a la geodésica $\Gamma(P'P)$.

Entonces la ecuación (2.2.5), que se puede escribir como $r_i \lambda_{(4)}^i = 0$, muestra que la componente temporal de r_i es cero, es decir,

$$r_i \lambda_{(4)}^i = r_{(4)} = 0,$$

con lo que la *velocidad radial* o *velocidad de recesión* del emisor respecto del receptor aparece como

$$v_R = v_i r^i = v_{(\alpha)} r^{(\alpha)}.$$

Discutimos, ahora, el efecto Doppler desde un punto de vista mecánico. Bajo este análisis, consideremos un fotón que tiene a $\Gamma(P'P)$ por línea de universo y es emitido desde P' en L' , con 4-momento $p^{i'}$, siendo la energía de emisión ²

$$E' = -p_{i'} V^{i'}. \quad (2.2.6)$$

²El signo de esta ecuación se escoge de forma que E' sea positiva si $V^{i'}$ y $p^{i'}$ apuntan al futuro [5].

El 4-momento experimenta transporte paralelo a lo largo de $\Gamma(P'P)$, y en P se tiene

$$p_{i'}V^{i'} = p_i v^i,$$

ya que el producto escalar es invariante bajo transporte paralelo de los vectores entre los que se efectúa. Entonces, por (2.2.6), resulta

$$-E' = +p_{i'}V^{i'} = p_{(\alpha)}v^{(\alpha)} + p_{(4)}v^{(4)}. \quad (2.2.7)$$

La energía del fotón respecto de L es

$$E = -p_i V^i = -p_i \lambda_{(4)}^i = -p_{(4)} = p^{(4)}, \quad (2.2.8)$$

por lo que, de la ecuación (2.2.7), se obtiene

$$E' = -p_{(\alpha)}v^{(\alpha)} + E v^{(4)}. \quad (2.2.9)$$

La definición de r^i como vector que descansa en el 2-elemento que contiene a V^i y a p^i , y el hecho de que p_i sea un vector nulo, permiten escribir la siguiente descomposición

$$p^i = \theta(V^i - r^i), \quad (2.2.10)$$

donde $r_i r^i = 1$ (recordemos que $r_{(4)} = 0$) y θ es un escalar que hay que determinar.

Multiplicando ambos miembros por V_i , encontramos

$$p^i V_i = \theta(V^i V_i - r^i V_i).$$

Puesto que

$$V^i V_i = -1$$

y

$$r^i V_i = 0,$$

hallamos

$$p^i V_i = -\theta = -E,$$

donde la última igualdad resulta de (2.2.8).

Por tanto, la ecuación (2.2.10) se escribe

$$p^i = E(V^i - r^i). \quad (2.2.11)$$

Nos ocupamos ahora del término $p_{(\alpha)} v^{(\alpha)} = p_i \lambda_{(\alpha)}^i v^{(\alpha)}$. Sustituyendo el valor encontrado para p_i en (2.2.11), se llega a

$$\begin{aligned} p_{(\alpha)} v^{(\alpha)} &= E(V_i - r_i) \lambda_{(\alpha)}^i v^{(\alpha)} \\ &= E [V_i \lambda_{(\alpha)}^i - r_i \lambda_{(\alpha)}^i] v^{(\alpha)} \\ &= -E r_{(\alpha)} v^{(\alpha)} = -E v_R \end{aligned}$$

donde, en la penúltima igualdad, se ha tenido en cuenta que $V_i \lambda_{(\alpha)}^i = 0$, dado que $V_i = \lambda_{i(4)}$ es ortogonal a los demás elementos de la tetraeda, $\lambda_{(\alpha)}^i$, por la métrica (2.2.3).

Sustituyendo el resultado obtenido para $p_{(\alpha)} v^{(\alpha)}$ en la ecuación (2.2.9) y usando (2.2.4), llegamos a la siguiente relación entre la energía de emisión E' y la de recepción E :

$$E' = E v_R + E (1 + v^2)^{1/2} = E [(1 + v^2)^{1/2} + v_R], \quad (2.2.12)$$

que es el efecto Doppler en términos de energía. Así, el desplazamiento espectral está dado por

$$\frac{E' - E}{E'} = 1 - \frac{1}{(1 + v^2)^{1/2} + v_R}.$$

Si la velocidad relativa es pequeña, se obtiene

$$\frac{E' - E}{E'} \approx 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}v^2 + v_R} \approx 1 - (1 - \frac{1}{2}v^2 - v_R + v_R^2),$$

que nos da la conocida relación

$$\frac{E' - E}{E'} \approx \frac{1}{2}v^2 + v_R - v_R^2,$$

donde el término dominante es la velocidad radial v_R (recordemos que se tomó $c=1$).

La ecuación (2.2.12) muestra que las energías E' y E se relacionan, de manera natural, mediante los términos cinemáticos que hemos descrito. Hasta el momento, no se ha considerado efecto gravitatorio alguno pues la métrica es minkowskiana ([41]).

A continuación, relacionamos las energías de emisión y de recepción con las frecuencias en los respectivos instantes, haciendo uso de la ecuación de la energía del fotón y de las igualdades obtenidas en el anterior tratamiento mecánico.

En el sistema de referencia del receptor, la energía viene dada por $E = hf = -p_i V^i$, donde f es la frecuencia en el instante de recepción y h la constante de Planck. En el sistema de referencia del emisor, se tiene $E' = hf' = -p_{i'} V^{i'}$, siendo f' la frecuencia en el instante de emisión.

El desplazamiento relativo en frecuencias se obtiene a partir de la relación

$$\frac{E' - E}{E'} = \frac{p_{i'} V^{i'} - p_i V^i}{p_{i'} V^{i'}}.$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta ecuación puede escribirse en términos de la derivada de la función de universo. En efecto, como ya se vio en la definición (2.1.5)

para un espacio-tiempo general, la geodésica $\Gamma(P'P)$ que conecta dos sucesos P' y P puede expresarse mediante las ecuaciones paramétricas $x^i = \xi^i(u)$, para $i = 1, \dots, 4$, con $u_0 \leq u \leq u_1$, siendo $P' : x^i(u_0)$ y $P : x^i(u_1)$. Las derivadas covariantes de la función de universo respecto de P' y P son:

$$\Omega_{i'}(P'P) = \frac{\partial \Omega}{\partial x^{i'}} = -(u_1 - u_0)U_{i'}$$

$$\Omega_i(P'P) = \frac{\partial \Omega}{\partial x^i} = (u_1 - u_0)U_i$$

donde U^i es el vector tangente $\frac{dx^i}{du}$.

Como ya se ha dicho, el cuádrimomento p^i del fotón en P tiene la dirección de la tangente a la geodésica $\Gamma(P'P)$ y se relaciona con el cuádrimomento $p^{i'}$ en P' mediante transporte paralelo, que conserva su norma, por lo que podemos escribir

$$U_{i'} = \alpha p_{i'}$$

$$U_i = \alpha p_i$$

siendo α la misma constante de proporcionalidad.

Por tanto,

$$\frac{f' - f}{f'} = \frac{\Omega_{i'}V^{i'} + \Omega_i V^i}{\Omega_{i'}V^{i'}}, \quad (2.2.13)$$

que es la ecuación (2.2.2), con $V = A$.

Notemos que la frecuencia f' es la frecuencia propia de la señal electromagnética emitida por el emisor en su propio sistema de referencia, es decir, en el sistema en el que está en reposo. La ecuación (2.2.13) contiene, ahora sí, el efecto del potencial gravitatorio y el asociado al movimiento relativo de emisor y receptor ([42]). El término *efecto Doppler*, originalmente, se reserva para este último.

La ecuación (2.2.13) es de una gran importancia, dado que es válida en cualquier sistema de referencia. Por ejemplo, puede ser evaluada en un sistema inercial o en un sistema de coordenadas rotacional. La clave para realizar los cálculos es hallar previamente la función de universo adecuada al espacio-tiempo en que se esté trabajando.

Finalmente, en lo sucesivo, puesto que se ha tomado $c = G = 1$, se podrán expresar todas las magnitudes en una única unidad que, por conveniencia, será segundos.

2.3. Las funciones de universo para el entorno de la Tierra

La función de universo correspondiente al modelo minkowskiano para el entorno de la Tierra ha sido definida en la primera sección de este capítulo, en las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4). Al asumir $c = 1$, como se viene haciendo, escribimos

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2}(\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - \Delta t^2). \quad (2.3.1)$$

Esta función de universo permite derivar las ecuaciones TDOA y FDOA estándar, usadas en la práctica ([12], [43], [44]). Sin embargo, para obtener ecuaciones posnewtonianas, más precisas que las correspondientes a esta aproximación, es suficiente considerar una tierra esférica ([45]) y adoptar como modelo de espacio-tiempo alrededor de la Tierra la aproximación posnewtoniana del campo exterior de Schwarzschild, cuya métrica en coordenadas pseudocartesianas viene dada por ([5])

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\alpha + \frac{\frac{2m}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r}} (x^\alpha x^\beta dx^\alpha dx^\beta) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2, \quad (2.3.2)$$

donde m es la masa de la Tierra, medida en segundos y r es la coordenada radial de curvatura.

Por tanto, la métrica que caracteriza la aproximación posnewtoniana de este campo, en coordenadas ECI, $x^i \equiv (x^\alpha, t)$, es

$$\begin{aligned} ds^2 &= \epsilon g_{ij} dx^i dx^j = \epsilon [\eta_{ij} + \gamma_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)] dx^i dx^j \\ &= \epsilon [(\delta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta + (-1 + \gamma_{44}) dt^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde $\gamma_{\alpha\beta} = 2m x^\alpha x^\beta / r^3$ y $\gamma_{44} = 2m/r$. Nótese que $\epsilon = \{-1, 0, 1\}$ para vectores dx^i con norma $\{<, =, > 0\}$, respectivamente.

Puesto que $\gamma_{ij} = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, se puede calcular la función de universo correspondiente a (2.3.3) mediante la expresión en (2.2.1), de lo que se obtiene

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] + m \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} du + m (\Delta t)^2 \int_0^1 \frac{du}{r}.$$

El cálculo de las integrales proporciona ([46], [30]):

$$\Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} du = |\Delta x^\alpha| \left[\log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right] \quad (2.3.4)$$

y

$$\int_0^1 \frac{du}{r} = \frac{1}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right), \quad (2.3.5)$$

donde θ_1, θ_2 son, respectivamente, los ángulos euclídeos formados por el vector $\Delta x^\alpha = x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}$ con los vectores de posición x^{α_1} y x^{α_2} (figura 2.5).

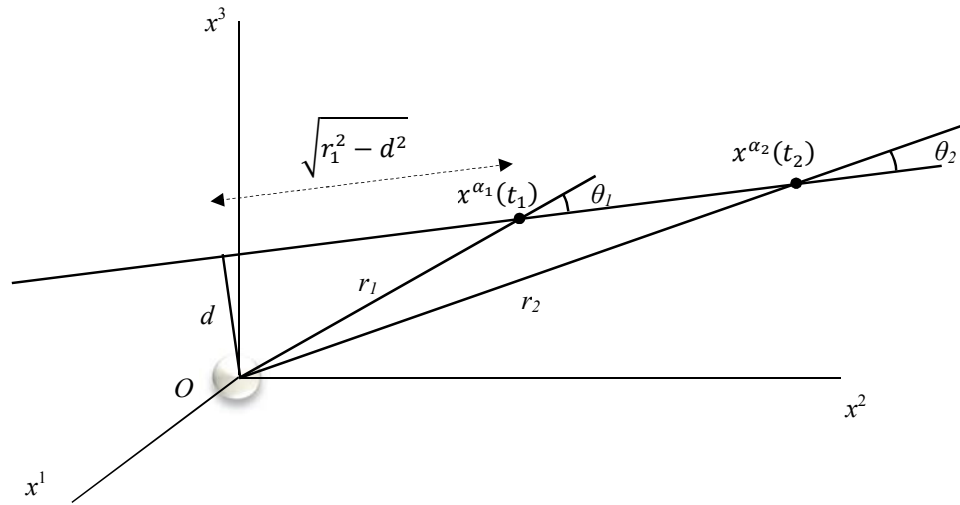


Figura 2.5 – Los ángulos θ_1 y θ_2 .

Por tanto, la función de universo en estas coordenadas, resulta

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1 P_2) &= \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] \\
&+ m |\Delta x^\alpha| \left[\log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right] \\
&+ \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Es conveniente disponer de una expresión alternativa para $\Omega(P_1 P_2)$, en función de variables lineales. En efecto, sea d la distancia euclídea desde el origen del sistema ECI hasta la recta que une x^{α_1} y x^{α_2} , y sean $r_1^2 = x^{\alpha_1} x^{\alpha_1}$, $r_2^2 = x^{\alpha_2} x^{\alpha_2}$, entonces, haciendo uso de la identidad trigonométrica $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ podemos escribir, de acuerdo con la situación que se ilustra en la figura 2.5, las siguientes igualdades

$$\tan \frac{\theta_1}{2} = \frac{\sin \theta_1}{1 + \cos \theta_1} = \frac{d}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}}$$

y

$$\tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{d}{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}},$$

de forma que

$$\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}}.$$

Además,

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2}$$

Por consiguiente, (2.3.6) pasa a ser ([30])

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1 P_2) &= \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] \\
&+ m |\Delta x^\alpha| \left[\log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right] \\
&+ \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{2.3.7}
\end{aligned}$$

En el caso de que se tengan sucesos P_1, P_2 cuyas coordenadas $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}$, en los respectivos instantes t_1 y t_2 , estén alineadas con el origen del sistema ECI, se toma el límite de (2.3.7) cuando $d \rightarrow 0$, con lo que resulta que la función de universo para el entorno de la Tierra se simplifica a:

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1 P_2) &= \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] \\
&+ m \left[|\Delta x^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \right] \log \frac{r_2}{r_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{2.3.8}
\end{aligned}$$

Como se puede ver, las expresiones (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8) son generalizaciones naturales de la función de universo minkowskiana puesto que si el espacio que rodea a la Tierra fuera plano, los términos de segundo orden en ellas desaparecerían y se tendría

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2], \tag{2.3.9}$$

que es la función de universo en (2.1.3), con $c = 1$.

Para el caso minkowskiano, las derivadas parciales de $\Omega(P_1 P_2)$, es decir, $\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}$, se reducen a las simples expresiones siguientes:

$$\Omega_{\alpha_1} = -\Delta x^\alpha, \quad \Omega_{4_1} = -\Delta t; \quad \Omega_{\alpha_2} = \Delta x^\alpha, \quad \Omega_{4_2} = \Delta t, \tag{2.3.10}$$

que son las posiciones minkowskianas de P_1 respecto de P_2 y de P_2 respecto de P_1 respectivamente, como se indicó en la propiedad sexta.

Para el modelo posnewtoniano, las derivadas parciales de $\Omega(P_1 P_2)$ cuando P_1 y P_2 no están alineados con el centro del sistema ECI, se obtienen a partir de (2.3.7) y son

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha_1} &= -\Delta x^\alpha - m \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|} \left[\log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right] \\
&\quad - m |\Delta x^\alpha| \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1^3} x^{\alpha_1} + m (\Delta t)^2 \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|^3} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) \\
&\quad - \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \frac{x^{\alpha_1}}{r_1 \sqrt{r_1^2 - d^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
\Omega_{\alpha_2} &= \Delta x^\alpha + m \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|} \left[\log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right] \\
&\quad + m |\Delta x^\alpha| \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2^3} x^{\alpha_2} - m (\Delta t)^2 \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|^3} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) \\
&\quad + \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \frac{x^{\alpha_2}}{r_2 \sqrt{r_2^2 - d^2}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
\Omega_{4_1} = -\Omega_{4_2} &= \Delta t - 2m \frac{\Delta t}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{2.3.11}
\end{aligned}$$

Para el caso alineado, de (2.3.8) resulta

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha_1} &= -\Delta x^\alpha + m \left[-\frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|} + \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|^3} (\Delta t)^2 \right] \log \frac{r_2}{r_1} \\
&\quad - m \left[|\Delta x^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \right] \frac{x^{\alpha_1}}{r_1^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{\alpha_2} &= \Delta x^\alpha + m \left[\frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|} - \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\alpha|^3} (\Delta t)^2 \right] \log \frac{r_2}{r_1} \\
&\quad + m \left[|\Delta x^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \right] \frac{x^{\alpha_2}}{r_2^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
\Omega_{4_1} &= -\Omega_{4_2} = \Delta t - 2m \frac{\Delta t}{|\Delta x^\alpha|} \log \frac{r_2}{r_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{2.3.12}
\end{aligned}$$

2.4. La ecuación del tiempo

La relación que muestra el tiempo que emplea una señal electromagnética en conectar dos sucesos del espacio-tiempo se conoce como ecuación del tiempo. De acuerdo con la aproximación posnewtoniana, la señal experimenta un retraso respecto del tiempo calculado mediante la aproximación minkowskiana, debido a que la trayectoria recorrida por la señal es curva y, por tanto, más larga que el segmento rectilíneo que uniría los dos sucesos si el espacio fuera plano. Este retraso se conoce como efecto Shapiro o *Shapiro time-delay* ([47]). Para un espacio-tiempo dado por (2.3.2), la ecuación del tiempo se puede deducir de una manera verdaderamente sencilla por medio de las funciones de universo (2.3.6) y (2.3.8), o bien, alternativamente, mediante (2.3.7) ([48]). En efecto, puesto que para una señal electromagnética que enlaza dos sucesos P_1 y P_2 , se tiene $\Omega(P_1 P_2) = 0$, basta con obtener una solución de esta ecuación en primer orden de aproximación e iterarla en los términos de segundo orden. Entonces, a partir de (2.3.9), escribimos

$$\Omega(P_1 P_2) = \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] = 0,$$

de donde

$$(\Delta t)^2 = \Delta x^\alpha \Delta x^\alpha = |\Delta x^\alpha|^2, \tag{2.4.1}$$

que introducido en los términos de orden superior de (2.3.6) da lugar a

$$0 = \frac{1}{2} [\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2] + m |\Delta x^\alpha| \left[\log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right] \\ + \frac{m |\Delta x^\alpha|^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

de forma que se obtiene

$$(\Delta t)^2 = |\Delta x^\alpha|^2 \left\{ 1 + \frac{2m}{|\Delta x^\alpha|} \left[2 \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

y, finalmente,

$$\Delta t = |\Delta x^\alpha| \left\{ 1 + \frac{m}{|\Delta x^\alpha|} \left[2 \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_1}{2}}{\tan \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.4.2)$$

La comparación con (2.4.1) permite identificar inmediatamente el término correspondiente al efecto Shapiro.

Equivalentemente, a partir de (2.3.7), resulta

$$\Delta t = |\Delta x^\alpha| \left\{ 1 + \frac{m}{|\Delta x^\alpha|} \left[2 \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.4.3)$$

La ecuación del tiempo para el caso alineado se obtiene fácilmente tomando el límite de (2.4.3) cuando $d \rightarrow 0$:

$$\Delta t = |\Delta x^\alpha| \left\{ 1 + \frac{2m}{|\Delta x^\alpha|} \log \frac{r_2}{r_1} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (2.4.4)$$

2.5. Resumen

La importancia de la función de universo de Synge como herramienta matemática para derivar las ecuaciones TDOA-FDOA, exige que se le dedique un capítulo para definirla rigurosamente, dar sus propiedades y construir la función adecuada a cada espacio-tiempo en que se enmarca el procedimiento de geolocalización. La función de universo permite una formulación tensorial de las ecuaciones y constituye la expresión finita del elemento de línea en un espacio-tiempo determinado. En un espacio euclídeo, dados dos puntos, P_1 y P_2 , unidos por una única línea recta, $\Omega(P_1P_2)$ es una función suave no negativa de las seis coordenadas, tres de cada punto. En un espacio-tiempo relativista, para cualesquiera dos sucesos P_1 y P_2 , unidos por una única geodésica, la función de universo depende de ocho coordenadas y puede ser positiva, negativa o cero, según sea la conexión espacio-temporal entre los sucesos. En cualquier caso es, salvo signo, la mitad del cuadrado de la distancia geodésica entre P_1 y P_2 .

Dado que $\Omega(P_1P_2)$ es una función suave de P_1 y P_2 , se pueden definir sin ambigüedad sus derivadas parciales respecto de las coordenadas de estos y admite un desarrollo en serie de potencias en torno a los dos sucesos. Ello permite obtener la relación (2.2.2) para el desplazamiento relativo en frecuencias de la que se derivan las ecuaciones FDOA.

No obstante, la propiedad fundamental de la que se obtienen las ecuaciones TDOA y la ecuación del tiempo es la que afirma que dos sucesos P_1 y P_2 están unidos por una señal electromagnética si y solo si $\Omega(P_1P_2) = 0$. La deducción de estas ecuaciones se lleva a cabo en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Geolocalización mediante TDOA-FDOA

3.1. Planteamiento general

En este capítulo se propone el método que permite determinar unívocamente: 1) las posiciones de radiotransmisores pasivos en los instantes de emisión de alguna señal electromagnética, en particular, cuando esta se emite desde el espacio exterior y 2) las velocidades de los radiotransmisores y las frecuencias de emisión en los instantes de emisión. El método se basa en la utilización de sistemas de ecuaciones TDOA y FDOA para no menos de cinco satélites y se puede desarrollar con los dos modelos de espacio-tiempo exterior terrestre que estamos estudiando, el clásico o minkowskiano y el posnewtoniano. Las ecuaciones se han deducido mediante las funciones de universo de Synge correspondientes a estos dos espacios.

De lo expuesto hasta ahora resulta que, por el hecho de ser la función de universo una función escalar bipuntual, la ecuación de partida para obtener las relaciones TDOA en ambas aproximaciones es, de acuerdo con la propiedad quinta de la sección 2.2,

$$\Omega(x_T^i, x_S^j) = 0, \quad (3.1.1)$$

esto es, las coordenadas x_T^i del transmisor T , en el instante de emisión de la señal, y las coordenadas x_S^j del receptor S , en el instante de recepción, están conectadas mediante la señal emitida por T .

Por otro lado, como se mencionó en el capítulo uno, la ecuación TDOA básica es la que relaciona la diferencia de tiempos de llegada de la señal a pares de receptores con las coordenadas del emisor, siendo conocidas las coordenadas espaciales de aquellos en los instantes de llegada de la señal.

Sean, pues, x_T^α las coordenadas espaciales del radiotransmisor T , en el instante x_T^4 de emisión de la señal, y sean x_S^α las coordenadas espaciales del satélite S , en el instante x_S^4 de recepción de la señal.

Considerando la función de universo para el modelo minkowskiano del espacio-tiempo alrededor de la Tierra, dada por la ecuación (2.3.1), se tiene para estas coordenadas

$$\Omega(x_T^i, x_S^j) = \frac{1}{2}[(\Delta x^\alpha)^2 - (\Delta x^4)^2], \quad (3.1.2)$$

donde $\Delta x^\alpha = (x_S^\alpha - x_T^\alpha)$ y $\Delta x^4 = (x_S^4 - x_T^4)$.

De (3.1.1) se deduce, haciendo $c = 1$, la igualdad

$$x_S^4 - x_T^4 = |x_S^\alpha - x_T^\alpha| \equiv r_{TS}, \quad (3.1.3)$$

siendo r_{TS} la distancia euclídea entre las coordenadas de T , en el instante de emisión, y las de S , en el instante de recepción. Las coordenadas x_T^α , x_S^α corresponden, pues, a instantes diferentes; por esta razón, a r_{TS} se le denomina *pseudorange* de T a S .

De (3.1.3), resulta

$$x_S^4 = x_T^4 + r_{TS}, \quad (3.1.4)$$

de manera que escribiendo (3.1.3) para dos satélites S_1 y S_2 , y restando, se obtiene

$$x_{S_1}^4 - x_{S_2}^4 = |x_{S_1}^\alpha - x_T^\alpha| - |x_{S_2}^\alpha - x_T^\alpha| \equiv r_{TS_1} - r_{TS_2} \equiv r_{1,2} \quad (3.1.5)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
x_{S_1}^4 - x_{S_2}^4 &= \sqrt{(x_{S_1}^1 - x_T^1)^2 + (x_{S_1}^2 - x_T^2)^2 + (x_{S_1}^3 - x_T^3)^2} \\
&- \sqrt{(x_{S_2}^1 - x_T^1)^2 + (x_{S_2}^2 - x_T^2)^2 + (x_{S_2}^3 - x_T^3)^2}, \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

que es la ecuación minkowskiana (1.2.1).

Análogamente, de acuerdo con (3.1.1), la ecuación TDOA en el modelo posnewtoniano, tomando la función (2.3.6), es

$$\begin{aligned}
x_{S_1}^4 - x_{S_2}^4 &= r_1 - r_2 + m \left[2 \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_{T_1}}{2} \tan \frac{\theta_{S_2}}{2}}{\tan \frac{\theta_{S_1}}{2} \tan \frac{\theta_{T_2}}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (\cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_1}) \right], \quad (3.1.7)
\end{aligned}$$

donde θ_{T_i} y θ_{S_i} son los ángulos euclídeos que forman x_T^α y $x_{S_i}^\alpha$, respectivamente, con $\Delta x_i^\alpha = x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha$, $i = 1, 2$ (figura 3.1).

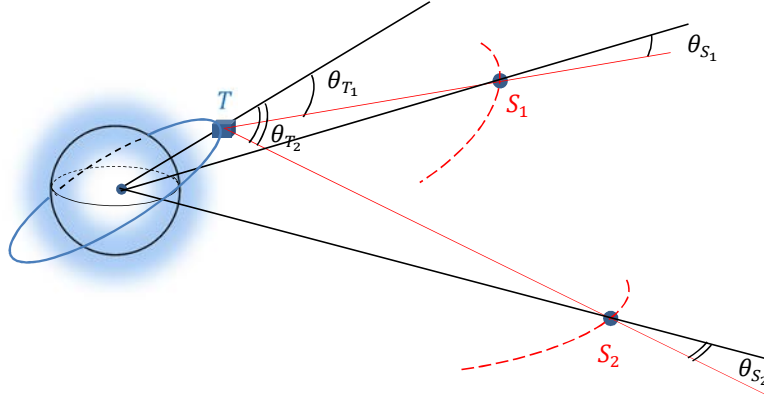


Figura 3.1 – Ángulos de la ecuación TDOA en el modelo posnewtoniano

Para el caso en que los sucesos de emisión y de recepción, en sus respectivos instantes, estén alineados con el origen ECI se obtiene, de la función (2.3.8), la ecuación TDOA

$$x_{S_1}^4 - x_{S_2}^4 = r_1 - r_2 + 2m \left(\log \frac{r_{S_1}}{r_{S_2}} \right). \quad (3.1.8)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que en el modelo minkowskiano las derivadas primeras de $\Omega(x_T^i, x_S^j)$ vienen dadas por (véase (2.3.10)):

$$\Omega_{\alpha_T} = -\Delta x^\alpha, \quad \Omega_{4_T} = -\Delta x^4; \quad \Omega_{\alpha_S} = \Delta x^\alpha, \quad \Omega_{4_S} = \Delta x^4 \quad (3.1.9)$$

y que los vectores unitarios tangentes a las líneas de universo L_T de T y L_S de S , en x_T^4 y x_S^4 , respectivamente, tienen por componentes ([49]):

$$A_T^\alpha = v_T^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad A_S^\alpha = v_S^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad A_T^4 = \left(\frac{ds_T}{dt} \right)^{-1} = A_S^4 = \left(\frac{ds_S}{dt} \right)^{-1} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (3.1.10)$$

se tiene, hasta $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, que

$$\Omega_{i_T} A_T^i + \Omega_{i_S} A_S^i = \Delta x^\alpha (v_S^\alpha - v_T^\alpha); \quad \Omega_{j_T} A_T^j = |\Delta x^\alpha|,$$

de forma que

$$\frac{\Omega_{i_T} A_T^i + \Omega_{i_S} A_S^i}{\Omega_{j_T} A_T^j} = \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

donde s_T , s_S son los tiempos propios de T y S respectivamente, y v_T^α , v_S^α son las velocidades respectivas de T y S , en x_T^4 y x_S^4 .

Por lo tanto, de acuerdo con la propiedad séptima de la sección 2.2, la relación entre las frecuencias de emisión, f_T , y de recepción, f_S , es:

$$f_S = f_T \left\{ 1 - \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.1.11)$$

Análogamente, para el modelo posnewtoniano ([49]), se tiene:

$$\begin{aligned}
A_T^\alpha &= v_T^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad A_S^\alpha = v_S^\alpha + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
A_T^4 &= \left(\frac{ds_T}{dt}\right)^{-1} = 1 + \frac{m}{r_T} + \frac{1}{2}(v_T)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
A_S^4 &= \left(\frac{ds_S}{dt}\right)^{-1} = 1 + \frac{m}{r_S} + \frac{1}{2}(v_S)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

donde $(v_T)^2 = v_T^\alpha v_T^\alpha$ y $(v_S)^2 = v_S^\alpha v_S^\alpha$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_{i_T} A_T^i + \Omega_{i_S} A_S^i}{\Omega_{j_T} A_T^j} &= \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) \\
&+ \frac{m}{r_T} - \frac{m}{r_S} + \frac{1}{2}[(v_T)^2 - (v_S)^2] \\
&+ \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) \frac{\Delta x^\beta}{|\Delta x^\gamma|} v_T^\beta + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
f_S &= f_T \left\{ 1 - \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) \right. \\
&+ \frac{m}{r_S} - \frac{m}{r_T} + \frac{1}{2}[(v_S)^2 - (v_T)^2] \\
&\left. - \frac{\Delta x^\alpha}{|\Delta x^\gamma|} (v_S^\alpha - v_T^\alpha) \frac{\Delta x^\beta}{|\Delta x^\gamma|} v_T^\beta \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

donde, igual que con respecto a la ecuación (3.1.11), conviene resaltar el hecho de que $(\Delta x^\alpha/|\Delta x^\gamma|)(v_S^\alpha - v_T^\alpha)$ es la componente de la diferencia de velocidades, $v_S^\alpha - v_T^\alpha$, a lo largo de la dirección de observación, en el instante de recepción de la señal. En adelante, designaremos la dirección $\Delta x^\alpha/|\Delta x^\gamma|$ como u^α y nos referiremos a ella como la dirección *LOS*, acrónimo del término inglés *Line of Sight* (figura 3.2).

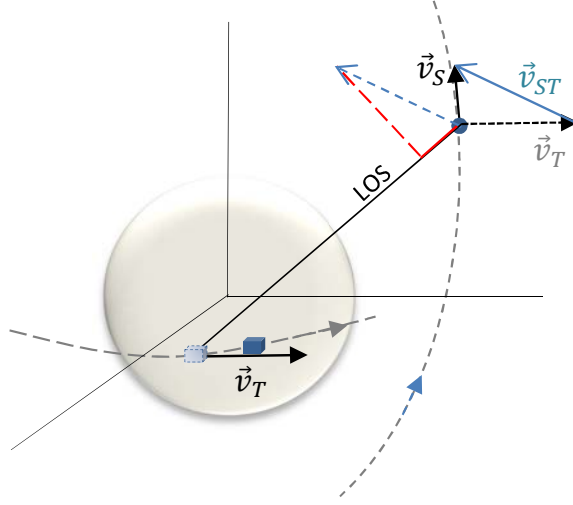


Figura 3.2 – Velocidad relativa \vec{v}_{ST} y su proyección a lo largo de la dirección LOS .

Podemos, finalmente, escribir las ecuaciones FDOA en las dos aproximaciones consideradas:

En el modelo minkowskiano la ecuación FDOA correspondiente a S_1 y S_2 es:

$$F_{12} \equiv f_{S_1} - f_{S_2} = f_T \left\{ u_{(2)}^\alpha (v_{S_2}^\alpha - v_T^\alpha) - u_{(1)}^\alpha (v_{S_1}^\alpha - v_T^\alpha) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.1.15)$$

En el modelo posnewtoniano, la ecuación correspondiente a esos dos mismos satélites es:

$$\begin{aligned} F_{12} &\equiv f_{S_1} - f_{S_2} \\ &= f_T \left\{ u_{(2)}^\alpha (v_{S_2}^\alpha - v_T^\alpha) [1 + u_{(2)}^\beta v_T^\beta] - u_{(1)}^\alpha (v_{S_1}^\alpha - v_T^\alpha) [1 + u_{(1)}^\beta v_T^\beta] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [(v_{S_1})^2 - (v_{S_2})^2] + \left[\frac{m}{r_{S_1}} - \frac{m}{r_{S_2}} \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

donde los vectores $u_{(i)}^\alpha = (x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha) / |x_{S_i}^\gamma - x_T^\gamma|$, con $i = 1, 2$, se calculan previamente, una vez que se ha resuelto la posición del radiotransmisor, a partir de las medidas TDOA ([50]).

Para la situación en que los sucesos de emisión y recepción, en sus respectivos instantes, se encuentren alineados con el origen del sistema ECI, se tendrá $u_{(1)}^\alpha = u_{(2)}^\alpha \equiv u^\alpha$ con lo que, haciendo uso de las ecuaciones (2.3.12) y (2.4.4), resulta la ecuación FDOA

$$F_{12} = f_T \left\{ [(v_{S_2}^\alpha - v_{S_1}^\alpha)u^\alpha] \left[1 + v_T^\beta u^\beta \right] + \left[\frac{m}{r_{S_1}} - \frac{m}{r_{S_2}} \right] + \frac{1}{2} [(v_{S_1})^2 - (v_{S_2})^2] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.1.17)$$

La ecuación (3.1.16) es el punto culminante al que se llega en esta tesis y ello obliga a concentrarse en ella. En efecto, se observa que el formalismo posnewtoniano añade cuatro términos a la ecuación FDOA minkowskiana (3.1.15), los cuales son determinantes para aumentar la precisión en el cálculo de la velocidad del radiotransmisor que orbita en el entorno de la Tierra. Estos términos son [51]:

$$\frac{1}{2} [(v_{S_1})^2 - (v_{S_2})^2], \quad \left[\frac{m}{r_{S_1}} - \frac{m}{r_{S_2}} \right], \quad u_{(1)}^\alpha (v_{S_1}^\alpha - v_T^\alpha) (u_{(1)}^\beta v_T^\beta), \quad u_{(2)}^\alpha (v_{S_2}^\alpha - v_T^\alpha) (u_{(2)}^\beta v_T^\beta). \quad (3.1.18)$$

Ahora bien, dependiendo de las configuraciones de satélites elegidas, que han de plantearse cuidadosamente, los dos primeros términos podrían no aportar una contribución significativa, independientemente de la posición en que se encuentre el radiotransmisor. Así ocurre, por ejemplo, cuando ambos satélites están en la misma órbita circular, en los instantes de recepción de la señal. Sin embargo, la contribución de los otros dos términos no puede ser ignorada, cualquiera que sea el escenario, y siempre aumenta la precisión que se logra cuando se considera únicamente el marco minkowskiano ([49]).

Típicamente, las aportaciones de estos dos términos son del orden de 10^{-10} para radiotransmisores en órbita terrestre, que equivalen a correcciones en velocidades de 2 cm/s, que son las que actualmente se tienen en cuenta en Navegación ([52], [53], [54]).

Los términos a los que aludimos se convierten, así, en el testigo sobre el que recae el aumento de la precisión en el cálculo de v_T y de f_T . Ellos, por sí mismos, justifican el desarrollo de las ecuaciones en el marco posnewtoniano.

Como se verá en la Sección 3.3, el número de satélites que se necesita para determinar unívocamente las cuatro incógnitas (v_T^α, f_T) , mediante ecuaciones del tipo (3.1.15) o (3.1.16), tiene que ser mayor de cuatro. En general, igual que para determinar la posición del radiotransmisor y el instante de emisión, cinco son suficientes e incluso pueden ser los mismos en ambos procedimientos. Ello da lugar a un elevado número de configuraciones de las cuales algunas permiten simplificar las ecuaciones FDOA, aunque no todas serán adecuadas. Atendiendo a las incógnitas $(x_T^\alpha(t_T), t_T)$, que son las que se resuelven por TDOA, se reducen cualitativamente a tres tipos, que son los siguientes:

1. Configuraciones para las cuales las posiciones $x_{S_i}^\alpha$ y $x_{S_j}^\alpha$ de algún par de satélites, S_i, S_j , en sus respectivos instantes de recepción, t_{S_i}, t_{S_j} , no están alineadas con x_T^α ni con el origen del sistema ECI. La ecuación TDOA para este par, es:

$$t_{S_i} - t_{S_j} = r_{i,j} + m \left[2 \log \frac{(r_{S_i} + d_{S_i})(r_T + d_{T_j})}{(r_{S_j} + d_{S_j})(r_T + d_{T_i})} + \frac{d_{T_i} - d_{T_j}}{r_T} + \frac{d_{S_j}}{r_{S_j}} - \frac{d_{S_i}}{r_{S_i}} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.1.19)$$

donde $r_{i,j} = |x_{S_i}^\alpha(t_{S_i}) - x_T^\alpha(t_T)| - |x_{S_j}^\alpha(t_{S_j}) - x_T^\alpha(t_T)|$; $d_{T_i}^2 = r_T^2 - d_i^2$, $d_{S_i}^2 = r_{S_i}^2 - d_i^2$, siendo d_i la distancia euclídea desde el origen ECI hasta la recta que une $x_T^\alpha(t_T)$ y $x_{S_i}^\alpha(t_{S_i})$, y análogamente para los términos en j .

2. Configuraciones para las que uno de los satélites de la ecuación, digamos S_i , está alineado en el instante de recepción, t_{S_i} , con x_T^α y con el origen ECI. La ecuación TDOA, en este caso, es:

$$t_{S_i} - t_{S_j} = r_{i,j} + m \left[2 \log \frac{r_{S_i}(r_T + d_{T_j})}{r_T(r_{S_j} + d_{S_j})} + \frac{d_{S_j}}{r_{S_j}} - \frac{d_{T_j}}{r_T} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.1.20)$$

3. Situación en la que se da el alineamiento de algún par de satélites, S_i y S_j , en los respectivos instantes de recepción, con la posición del radiotransmisor, x_T^α , y con el origen ECI. La ecuación TDOA es:

$$t_{S_i} - t_{S_j} = r_{i,j} + 2m \log \frac{r_{S_i}}{r_{S_j}} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.1.21)$$

Sin embargo, no es aconsejable disponer satélites S_i, S_j que orbiten en determinadas trayectorias, como las *cuasi* circulares con el mismo semieje, ya que se pueden producir diferencias TDOA nulas.

En general, una primera regla para adoptar configuraciones idóneas a la hora de resolver el problema de la determinación de las posiciones y velocidades de un radiotransmisor con el método combinado TDOA-FDOA es que cuanto mayor sea la diferencia de distancias del radiotransmisor a los satélites, mayor precisión se alcanzará en la resolución de las incógnitas (x_T^α, x_T^4) ; y cuanto menor sea esta distancia, mayor precisión se obtendrá en la determinación de (v_T^α, f_T) , lo que obviamente requiere el estudio de las condiciones de compatibilidad, que es lo que se realiza en las dos siguientes secciones.

3.2. Las ecuaciones TDOA

En esta sección se analiza y mejora el método de geolocalización por TDOA desarrollado en [30], el cual proporciona localización única, utilizando un mínimo de cinco satélites. Como se acaba de señalar, para obtener la mayor precisión en este procedimiento se requieren diferencias apreciables de tiempos de llegada de la señal a los receptores, lo que se favorece situando convenientemente estos en órbitas distantes entre sí. De aquí, la idoneidad de utilizar simultáneamente satélites LEO y satélites geoestacionarios.

De la relación fundamental de partida (3.1.1) se deducen ecuaciones TDOA no lineales en los dos modelos de espacio-tiempo estudiados. Por ello, para construir ecuaciones lineales se requiere la utilización de un conjunto extra de relaciones que ligen las medidas de diferencias TDOA entre receptores.

3.2.1. Ecuaciones en el modelo minkowskiano

Consideremos tres satélites, S_i, S_j y S_k . Los datos TDOA medidos entre los correspondientes pares se designan por $r_{i,j}, r_{j,k}$ y $r_{i,k}$. Se comprueba que estos datos cumplen la relación

$$r_{i,j} + r_{j,k} - r_{i,k} = 0, \quad (3.2.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
r_{i,j} &\equiv r_i - r_j, \\
r_{j,k} &\equiv r_j - r_k, \\
r_{i,k} &\equiv r_i - r_k
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Entonces, para cinco satélites, S_1, \dots, S_5 , se tiene el conjunto de diez relaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} &= 0, \\
r_{4,3} + r_{3,1} - r_{4,1} &= 0, \\
r_{4,2} + r_{2,1} - r_{4,1} &= 0, \\
r_{4,3} + r_{3,2} - r_{4,2} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,3} + r_{3,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,2} + r_{2,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,2} - r_{5,2} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,3} - r_{5,3} &= 0, \\
r_{5,3} + r_{3,2} - r_{5,2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

A partir de (3.2.2) formamos los productos

$$\begin{aligned}
r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2, \\
r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_2)(r_2 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_2)(r_4 - r_2) = r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2, \\
r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,4}r_1^2 + r_{4,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2, \\
r_{5,3}r_{3,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_3)(r_3 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,3}r_1^2 + r_{3,1}r_5^2 - r_{5,1}r_3^2, \\
r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_2)(r_2 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,2}r_1^2 + r_{2,1}r_5^2 - r_{5,1}r_2^2, \\
r_{5,4}r_{4,2}r_{5,2} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_2)(r_5 - r_2) = r_{5,4}r_2^2 + r_{4,2}r_5^2 - r_{5,2}r_4^2, \\
r_{5,4}r_{4,3}r_{5,3} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_3)(r_5 - r_3) = r_{5,4}r_3^2 + r_{4,3}r_5^2 - r_{5,3}r_4^2, \\
r_{5,3}r_{3,2}r_{5,2} &= (r_5 - r_3)(r_3 - r_2)(r_5 - r_2) = r_{5,3}r_2^2 + r_{3,2}r_5^2 - r_{5,2}r_3^2.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

En este conjunto, se sustituye r_i^2 por $(x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha)(x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha)$, y se designan por K_i los valores $x_{S_i}^\alpha x_{S_i}^\alpha$. Denotando por (x, y, z) las coordenadas x_T^α del transmisor, en el instante de emisión, y por (x_i, y_i, z_i) las de los satélites $x_{S_i}^\alpha$, en los respectivos instantes de recepción, se tienen $r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ y $K_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, con $i = 1, \dots, 5$. Entonces, para la primera ecuación (3.2.4), se tiene:

$$\begin{aligned}
r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2 = r_{3,2}[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2] \\
&+ r_{2,1}[(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2] - r_{3,1}[(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2] \\
&= r_{3,2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + r_{2,1}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - r_{3,1}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - 2(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)x \\
&- 2(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2)y - 2(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2)z + (r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2) \\
&= r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2 + m_1x + n_1y + v_1z + (r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2).
\end{aligned}$$

La primera relación en (3.2.3) es $r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} = 0$, con lo cual el último término obtenido se anula y la ecuación se convierte en

$$r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} = l_1 + m_1x + n_1y + v_1z$$

Operando de forma análoga con el resto de las ecuaciones (3.2.4), se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= l_1 + m_1x + n_1y + v_1z, \\
r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= l_2 + m_2x + n_2y + v_2z, \\
r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} &= l_3 + m_3x + n_3y + v_3z, \\
r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= l_4 + m_4x + n_4y + v_4z, \\
r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= l_5 + m_5x + n_5y + v_5z, \\
r_{5,3}r_{3,1}r_{5,1} &= l_6 + m_6x + n_6y + v_6z, \\
r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1} &= l_7 + m_7x + n_7y + v_7z, \\
r_{5,4}r_{4,2}r_{5,2} &= l_8 + m_8x + n_8y + v_8z, \\
r_{5,4}r_{4,3}r_{5,3} &= l_9 + m_9x + n_9y + v_9z, \\
r_{5,3}r_{3,2}r_{5,2} &= l_{10} + m_{10}x + n_{10}y + v_{10}z,
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2, \\
l_2 &= r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3, \\
l_3 &= r_{4,2}K_1 + r_{2,1}K_4 - r_{4,1}K_2, \\
l_4 &= r_{4,3}K_2 + r_{3,2}K_4 - r_{4,2}K_3, \\
l_5 &= r_{5,4}K_1 + r_{4,1}K_5 - r_{5,1}K_4, \\
l_6 &= r_{5,3}K_1 + r_{3,1}K_5 - r_{5,1}K_3, \\
l_7 &= r_{5,2}K_1 + r_{2,1}K_5 - r_{5,1}K_2, \\
l_8 &= r_{5,4}K_2 + r_{4,2}K_5 - r_{5,1}K_4, \\
l_9 &= r_{5,4}K_3 + r_{4,3}K_5 - r_{5,3}K_4, \\
l_{10} &= r_{5,3}K_2 + r_{3,2}K_5 - r_{5,2}K_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= -2(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2), \\
m_2 &= -2(r_{4,3}x_1 + r_{3,1}x_4 - r_{4,1}x_3), \\
m_3 &= -2(r_{4,2}x_1 + r_{2,1}x_4 - r_{4,1}x_2), \\
m_4 &= -2(r_{4,3}x_2 + r_{3,2}x_4 - r_{4,2}x_3), \\
m_5 &= -2(r_{5,4}x_1 + r_{4,1}x_5 - r_{5,1}x_4), \\
m_6 &= -2(r_{5,3}x_1 + r_{3,1}x_5 - r_{5,1}x_3), \\
m_7 &= -2(r_{5,2}x_1 + r_{2,1}x_5 - r_{5,1}x_2), \\
m_8 &= -2(r_{5,4}x_2 + r_{4,2}x_5 - r_{5,2}x_4), \\
m_9 &= -2(r_{5,4}x_3 + r_{4,3}x_5 - r_{5,3}x_4), \\
m_{10} &= -2(r_{5,3}x_2 + r_{3,2}x_5 - r_{5,2}x_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_1 &= -2(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2), \\
n_2 &= -2(r_{4,3}y_1 + r_{3,1}y_4 - r_{4,1}y_3), \\
n_3 &= -2(r_{4,2}y_1 + r_{2,1}y_4 - r_{4,1}y_2), \\
n_4 &= -2(r_{4,3}y_2 + r_{3,2}y_4 - r_{4,2}y_3), \\
n_5 &= -2(r_{5,4}y_1 + r_{4,1}y_5 - r_{5,1}y_4), \\
n_6 &= -2(r_{5,3}y_1 + r_{3,1}y_5 - r_{5,1}y_3), \\
n_7 &= -2(r_{5,2}y_1 + r_{2,1}y_5 - r_{5,1}y_2), \\
n_8 &= -2(r_{5,4}y_2 + r_{4,2}y_5 - r_{5,2}y_4), \\
n_9 &= -2(r_{5,4}y_3 + r_{4,3}y_5 - r_{5,3}y_4), \\
n_{10} &= -2(r_{5,3}y_2 + r_{3,2}y_5 - r_{5,2}y_3);
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
v_1 &= -2(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2), \\
v_2 &= -2(r_{4,3}z_1 + r_{3,1}z_4 - r_{4,1}z_3), \\
v_3 &= -2(r_{4,2}z_1 + r_{2,1}z_4 - r_{4,1}z_2), \\
v_4 &= -2(r_{4,3}z_2 + r_{3,2}z_4 - r_{4,2}z_3), \\
v_5 &= -2(r_{5,4}z_1 + r_{4,1}z_5 - r_{5,1}z_4), \\
v_6 &= -2(r_{5,3}z_1 + r_{3,1}z_5 - r_{5,1}z_3), \\
v_7 &= -2(r_{5,2}z_1 + r_{2,1}z_5 - r_{5,1}z_2), \\
v_8 &= -2(r_{5,4}z_2 + r_{4,2}z_5 - r_{5,2}z_4), \\
v_9 &= -2(r_{5,4}z_3 + r_{4,3}z_5 - r_{5,3}z_4), \\
v_{10} &= -2(r_{5,3}z_2 + r_{3,2}z_5 - r_{5,2}z_3).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

El conjunto de ecuaciones (3.2.5) relaciona los datos TDOA entre receptores con las coordenadas del transmisor y con el instante de emisión, objetivos de esta parte del problema. Se necesitan únicamente tres de estas ecuaciones para hallarlos.

Los sistemas formados por tres ecuaciones elegidas de entre las cuatro primeras del conjunto (3.2.5) no dan solución única al problema de la localización del radiotransmisor, dado que existe dependencia lineal entre cualesquiera tres de ellas ([12], [30]). Solo dos son independientes. Se observa, además, que las cuatro primeras involucran solamente cuatro de los cinco satélites. Escogemos, por consiguiente, las dos primeras y junto con la quinta, construimos el sistema lineal de ecuaciones TDOA, que en representación matricial, se escribe:

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ m_2 & n_2 & v_2 \\ m_5 & n_5 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1 \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2 \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

o, en notación compacta,

$$\mathbb{M} \vec{x} = \mathbb{N}.$$

Las condiciones para la independencia lineal del sistema (3.2.7) se determinan exigiendo que el determinante de la matriz \mathbb{M} de los coeficientes sea no nulo. Siguiendo un proceso de eliminación mediante operaciones elementales ([55], [56]), se llega a una matriz triangular equivalente a \mathbb{M} , que nos permite calcular su determinante de manera sencilla:

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ 0 & m_1n_2 - n_1m_2 & m_1v_2 - v_1m_2 \\ 0 & 0 & (m_1v_2 - v_1m_2)(m_1n_5 - n_1m_5) - (m_1n_2 - n_1m_2)(m_1v_5 - v_1m_5) \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \det \mathbb{M} &= m_1(m_1n_2 - n_1m_2) \\ &\times [(m_1v_2 - v_1m_2)(m_1n_5 - n_1m_5) - (m_1n_2 - n_1m_2)(m_1v_5 - v_1m_5)] \\ &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Este resultado establece que ninguno de los factores en (3.2.8) puede ser nulo. Por tanto, las condiciones para la independencia lineal que se deben dar simultáneamente son:

$$\begin{cases} \text{a) } m_1 \neq 0, \\ \text{b) } (m_1n_2 - n_1m_2) \neq 0, \\ \text{c) } (m_1v_2 - v_1m_2)(m_1n_5 - n_1m_5) - (m_1n_2 - n_1m_2)(m_1v_5 - v_1m_5) \neq 0. \end{cases}$$

Estudiemos estas tres condiciones:

a) La condición $m_1 \neq 0$ debe interpretarse en el sentido de que basta con que cualquiera de los m_i involucrados, $i = 1, 2, 5$, sea no nulo. En el caso de que específicamente fuera $m_1 = 0$, escogeríamos como pivote cualquiera de los otros dos, no nulo, y el resto de las condiciones serían equivalentes; supondría simplemente una rotación de índices.

Escribimos explícitamente m_1 , dado en (3.2.6):

$$m_1 = -2(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2).$$

Si los satélites S_1 , S_2 y S_3 tienen la misma coordenada x respecto del centro ECI, es decir, si $x_1 = x_2 = x_3 \equiv x_0$, se tiene para m_1 :

$$m_1 = -2(r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})x_0$$

El término entre paréntesis es idénticamente cero, por (3.2.3). Por tanto:

La primera condición, $m_1 \neq 0$, requiere que los satélites S_1 , S_2 y S_3 no estén todos en un mismo plano paralelo al plano coordenado YZ , cuando reciban la señal.

b) Observamos, de la matriz \mathbf{M} , que la cantidad $(m_1n_2 - n_1m_2)$ es el menor complementario de v_5 . Esto sugiere ver el determinante de \mathbf{M} como el producto mixto de los vectores $\vec{m} = (m_1, m_2, m_5)$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_5)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_5)$, esto es:

$$\det \mathbf{M} = (\vec{m} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{v}$$

Es evidente que los vectores \vec{m} , \vec{n} y \vec{v} no pueden ser coplanarios. Ahora bien, necesitamos saber lo que significa esto en términos de coordenadas de los satélites. Escribiendo la desigualdad $(m_1n_2 - n_1m_2) \neq 0$ en función de los valores dados en (3.2.6), se obtienen expresiones para las coordenadas de los satélites que se pueden agrupar formando determinantes.

Entonces, $(m_1n_2 - n_1m_2) \neq 0$ se escribe:

$$\begin{aligned} & (r_{32}x_1 + r_{21}x_3 - r_{31}x_2)(r_{43}y_1 + r_{31}y_4 - r_{41}y_3) \\ & \neq (r_{32}y_1 + r_{21}y_3 - r_{31}y_2)(r_{43}x_1 + r_{31}x_4 - r_{41}x_3). \end{aligned}$$

Desarrollando los productos y agrupando términos, resulta

$$\begin{aligned}
& r_{32}r_{31}(x_1y_4 - y_1x_4) + r_{21}r_{43}(x_3y_1 - y_3x_1) + r_{21}r_{31}(x_3y_4 - y_3x_4) \\
+ & r_{31}r_{41}(x_2y_3 - y_2x_3) - r_{32}r_{41}(x_1y_3 - y_1x_3) - r_{31}r_{43}(x_2y_1 - y_2x_1) \\
- & r_{31}r_{31}(x_2y_4 - y_2x_4) \neq 0
\end{aligned}$$

Reordenando, llegamos a:

$$\begin{aligned}
& r_{31}r_{41}(x_2y_3 - y_2x_3) - r_{32}r_{41}(x_1y_3 - y_1x_3) + r_{31}r_{43}(x_1y_2 - y_1x_2) \\
+ & r_{21}r_{31}(x_3y_4 - y_3x_4) - r_{31}r_{32}(x_4y_1 - y_4x_1) - r_{21}r_{43}(x_1y_3 - y_1x_3) \\
- & (r_{31})^2(x_2y_4 - y_2x_4) \neq 0
\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{vmatrix} r_{31}r_{41} & r_{32}r_{41} & r_{31}r_{43} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_{21}r_{31} & -r_{31}r_{32} & -r_{21}r_{43} \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} \neq r_{31}^2(x_2y_4 - y_2x_4). \quad (3.2.9)$$

Por tanto, las coordenadas de los satélites S_1 , S_2 , S_3 y S_4 junto con los coeficientes involucrados habrán de satisfacer la relación (3.2.9).

Respecto de la condición c), se puede interpretar en términos similares a lo obtenido en la condición b) puesto que son productos de menores complementarios.

Los términos independientes proporcionan, asimismo, condiciones sobre la disposición de los satélites. De anularse todos ellos, la única solución del sistema sería la trivial. Por tanto, se tiene que cumplir, al menos, una de las tres desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
& r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1 \neq 0 \\
& r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2 \neq 0 \\
& r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5 \neq 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2 &\neq 0 \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3 &\neq 0 \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - r_{5,4}K_1 + r_{4,1}K_5 - r_{5,1}K_4 &\neq 0 \end{aligned}$$

Supóngase que la única de las desigualdades (3.2.10) que se cumple es la primera, entonces en el caso particular de que los satélites involucrados en ella estén a la misma distancia de la Tierra, se tendrá

$$K_1 = K_2 = K_3 \equiv K,$$

por lo que

$$l_1 = r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2 = (r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})K = 0,$$

donde, de nuevo, la igualdad a cero procede de las relaciones (3.2.3). En este caso, no podrá anularse ninguno de los correspondientes coeficientes r_{ij} involucrados, es decir, tendrá que ser $r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} \neq 0$.

3.2.2. Ecuaciones en el modelo posnewtoniano

Tal como se obtuvo en (3.1.7), la ecuación TDOA en el modelo posnewtoniano para dos satélites genéricos S_i , S_j , se escribe:

$$\begin{aligned} x_{S_i}^4 - x_{S_j}^4 = r_i - r_j + m \left[2 \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_{T_i}}{2} \tan \frac{\theta_{S_j}}{2}}{\tan \frac{\theta_{S_i}}{2} \tan \frac{\theta_{T_j}}{2}} \right) \right. \\ \left. + (\cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{T_j}) + (\cos \theta_{S_j} - \cos \theta_{S_i}) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Designemos ahora la diferencia $x_{S_i}^4 - x_{S_j}^4$ por $(r_{i,j})_{pN}$. Entonces la ecuación (3.2.11), resulta

$$(r_{i,j})_{pN} = r_i - r_j + p_{ij}, \quad (3.2.12)$$

donde el término posnewtoniano es

$$p_{ij} = m \left[2 \log \left(\frac{\tan \frac{\theta_{T_i}}{2} \tan \frac{\theta_{S_j}}{2}}{\tan \frac{\theta_{T_j}}{2} \tan \frac{\theta_{S_i}}{2}} \right) + (\cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{T_j}) + (\cos \theta_{S_j} - \cos \theta_{S_i}) \right] \quad (3.2.13)$$

y $r_i - r_j$ corresponde a la solución minkowskiana.

En el caso alineado, de la ecuación (3.1.8), se tiene el más simple término

$$p_{ij} = 2m \log \frac{r_{S_i}}{r_{S_j}}. \quad (3.2.14)$$

Escribiendo la igualdad (3.2.12) en la forma

$$(r_{i,j})_{pN} = (r_i - r_j) \left(1 + \frac{p_{ij}}{r_i - r_j} \right), \quad r_i \neq r_j \quad (3.2.15)$$

y designando los términos adimensionales $\frac{p_{ij}}{r_i - r_j}$ por η_{ij} , se tiene

$$(r_{i,j})_{pN} = (r_i - r_j) (1 + \eta_{ij}), \quad (3.2.16)$$

donde η_{ij} representan las correcciones posnewtonianas, las cuales dan cuenta de las diferencias de tiempos que resultan del hecho de que cada receptor mide el instante de recepción en su propio reloj y de que el emisor registra sus propias mediciones. Se trata de la combinación del mencionado efecto *time delay* de Shapiro para S_i y S_j el cual, como ya se dijo, no existe en el modelo minkowskiano.

Teniendo en cuenta la igualdad (3.2.16), se pueden formar las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
(r_{3,2})_{pN}(r_{2,1})_{pN}(r_{3,1})_{pN} &= (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31}) \\
&\approx (r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) \\
(r_{4,3})_{pN}(r_{3,1})_{pN}(r_{4,1})_{pN} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1)(1 + \eta_{43})(1 + \eta_{31})(1 + \eta_{41}) \\
&\approx (r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}) \\
(r_{5,4})_{pN}(r_{4,1})_{pN}(r_{5,1})_{pN} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_1)(r_5 - r_1)(1 + \eta_{54})(1 + \eta_{41})(1 + \eta_{51}) \\
&\approx (r_{5,4}r_1^2 + r_{4,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}),
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

donde se ha utilizado la aproximación $(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31}) \approx (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$ para la primera ecuación y, equivalentemente, para las siguientes.

En este conjunto, se sustituye r_i^2 por $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, y K_i por $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, con $i = 1, \dots, 5$, de manera que operando de modo similar a como se hizo en el caso minkowskiano, las relaciones (3.2.17) se transforman en

$$\begin{aligned}
(r_{3,2})_{pN}(r_{2,1})_{pN}(r_{3,1})_{pN} &= (l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) \\
(r_{4,3})_{pN}(r_{3,1})_{pN}(r_{4,1})_{pN} &= (l_2 + m_2x + n_2y + v_2z)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}) \\
(r_{5,4})_{pN}(r_{4,1})_{pN}(r_{5,1})_{pN} &= (l_5 + m_5x + n_5y + v_5z)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51})
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Renombrando términos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{l}_1 &= l_1(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\
\bar{l}_2 &= l_2(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\
\bar{l}_5 &= l_5(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{m}_1 &= m_1(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\
\bar{m}_2 &= m_2(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\
\bar{m}_5 &= m_5(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_1 &= n_1(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\
\bar{n}_2 &= n_2(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\
\bar{n}_5 &= n_5(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= v_1(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\
\bar{v}_2 &= v_2(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\
\bar{v}_5 &= v_5(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= (r_{3,2})_{pN}(r_{2,1})_{pN}(r_{3,1})_{pN}, \\
\bar{q}_2 &= (r_{4,3})_{pN}(r_{3,1})_{pN}(r_{4,1})_{pN}, \\
\bar{q}_5 &= (r_{5,4})_{pN}(r_{4,1})_{pN}(r_{5,1})_{pN},
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

el sistema (3.2.18) queda

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 &= \bar{l}_1 + \bar{m}_1 x + \bar{n}_1 y + \bar{v}_1 z \\
\bar{q}_2 &= \bar{l}_2 + \bar{m}_2 x + \bar{n}_2 y + \bar{v}_2 z \\
\bar{q}_5 &= \bar{l}_5 + \bar{m}_5 x + \bar{n}_5 y + \bar{v}_5 z,
\end{aligned}$$

que, en forma matricial, se escribe

$$\begin{pmatrix} \bar{m}_1 & \bar{n}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{m}_2 & \bar{n}_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{m}_5 & \bar{n}_5 & \bar{v}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 - \bar{l}_1 \\ \bar{q}_2 - \bar{l}_2 \\ \bar{q}_5 - \bar{l}_5 \end{pmatrix} \tag{3.2.20}$$

A la vista de la forma que tienen las ecuaciones (3.2.7) y (3.2.20) conviene observar que no hay diferencia formal entre las condiciones que han de satisfacerse para que

existan las soluciones TDOA minkowskiana y posnewtoniana. Designando por $\overline{\mathbb{M}}$ la matriz de coeficientes y siguiendo el mismo procedimiento llevado a cabo en la aproximación minkowskiana, se obtiene la siguiente matriz triangular equivalente a $\overline{\mathbb{M}}$:

$$\begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \overline{n}_1 & \overline{v}_1 \\ 0 & \overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2 & \overline{m}_1\overline{v}_2 - \overline{v}_1\overline{m}_2 \\ 0 & 0 & (\overline{m}_1\overline{v}_2 - \overline{v}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{n}_5 - \overline{n}_1\overline{m}_5) - (\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{v}_5 - \overline{v}_1\overline{m}_5) \end{pmatrix}$$

El determinante de ambas matrices equivalentes es:

$$\begin{aligned} \det \overline{\mathbb{M}} &= \overline{m}_1(\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2) \\ &\times [(\overline{m}_1\overline{v}_2 - \overline{v}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{n}_5 - \overline{n}_1\overline{m}_5) - (\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{v}_5 - \overline{v}_1\overline{m}_5)] \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Para que el sistema de ecuaciones (3.2.20) sea linealmente independiente el determinante (3.2.21) debe ser no nulo, lo que se garantiza exigiendo que los tres factores lo sean, por separado:

$$\begin{cases} \overline{m}_1 \neq 0, \\ (\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2) \neq 0, \\ (\overline{m}_1\overline{v}_2 - \overline{v}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{n}_5 - \overline{n}_1\overline{m}_5) - (\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{v}_5 - \overline{v}_1\overline{m}_5) \neq 0. \end{cases}$$

Respecto de la condición $\overline{m}_1 \neq 0$, escribimos el valor de \overline{m}_1 , dado en (3.2.19):

$$\overline{m}_1 = -2(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$$

Para la situación particular en que $x_1 = x_2 = x_3 \equiv x_0$, se tiene

$$\overline{m}_1 = -2(r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})x_0(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$$

El término $(r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})$, idénticamente cero, anula el coeficiente \overline{m}_1 , con lo cual, igual que en el caso minkowskiano, para que se cumpla la primera condición,

$\overline{m}_1 \neq 0$, los satélites S_1 , S_2 y S_3 no pueden estar en un mismo plano paralelo a YZ , en el instante de recepción.

Con respecto a la condición siguiente, la cantidad $(\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2)$ en la matriz $\overline{\mathbf{M}}$ es el menor complementario de \overline{v}_5 y el determinante de $\overline{\mathbf{M}}$ es el producto mixto de los vectores $\vec{\overline{m}} = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_5)$, $\vec{\overline{n}} = (\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_5)$ y $\vec{\overline{v}} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_5)$, es decir,

$$\det \overline{\mathbf{M}} = (\vec{\overline{m}} \wedge \vec{\overline{n}}) \cdot \vec{\overline{v}}$$

La exigencia de que sea $\det \overline{\mathbf{M}} \neq 0$ implica que los vectores $\vec{\overline{m}}$, $\vec{\overline{n}}$ y $\vec{\overline{v}}$ no pueden ser coplanarios.

Se observa que estas condiciones son equivalentes a las del caso minkowskiano. Y lo mismo puede decirse de la condición $(\overline{m}_1\overline{v}_2 - \overline{v}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{n}_5 - \overline{n}_1\overline{m}_5) - (\overline{m}_1\overline{n}_2 - \overline{n}_1\overline{m}_2)(\overline{m}_1\overline{v}_5 - \overline{v}_1\overline{m}_5) \neq 0$, así como del vector $(\overline{q}_1 - \overline{l}_1, \overline{q}_2 - \overline{l}_2, \overline{q}_5 - \overline{l}_5)$.

3.2.3. Ejemplo de geolocalización por TDOA

Presentamos un ejemplo en el que se pone de manifiesto que, cuando se observan las condiciones recién obtenidas, pueden aparecer diferencias muy notables entre los resultados hallados mediante las aproximaciones minkowskiana y posnewtoniana, cuando los radiotransmisores se encuentran orbitando alrededor de la Tierra. En la simulación que se muestra, los cinco satélites involucrados, S_1, \dots, S_5 , tienen diferencias de radios orbitales grandes, en los respectivos instantes de emisión. No obstante, la configuración es bastante usual, ya que todos ellos se encuentran en órbitas *cuasi* circulares, y está formada por un satélite LEO, dos satélites MEO y dos GEO. Los datos correspondientes a la longitud del nodo ascendente, Ω , inclinación de la órbita, i , argumento del perigeo junto con la anomalía verdadera, $\omega + f$, y radio orbital, r , de cada uno, en los instantes de recepción, son los siguientes:

S_1 :	$\Omega_1 = -60.01^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.037002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -65^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 56.8^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$

$$S_5: \quad \Omega_5 = -60^\circ; \quad i_5 = 0^\circ; \quad (\omega + f)_5 = 0^\circ; \quad r_5 = 0.14002 \text{ s}.$$

En las figuras que siguen se representan las correcciones en función de las inclinaciones orbitales y de los argumentos del perigeo más las anomalías verdaderas de los emisores en los instantes de emisión:

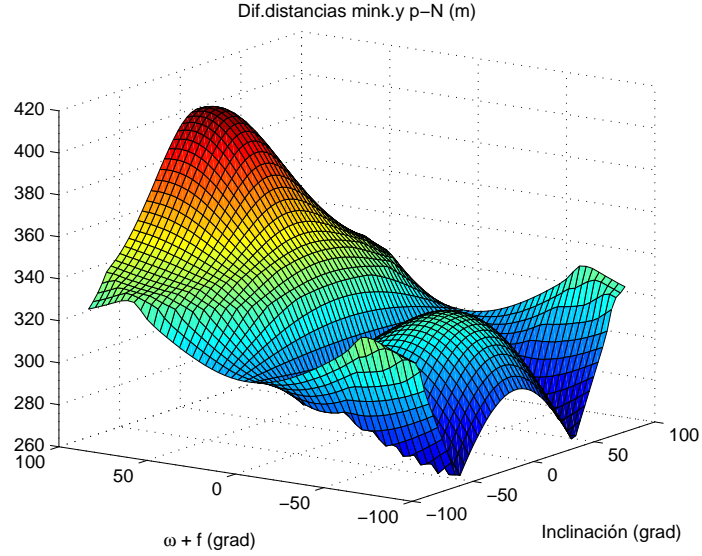


Figura 3.3 – *Diferencias de distancias minkowskianas y posnewtonianas.*

La figura (3.3) muestra la diferencia de distancias obtenidas mediante el formalismo minkowskiano, que es el modelo de geolocalización actualmente en uso, y la aproximación posnewtoniana. Se alcanzan diferencias de distancias entre, aproximadamente, 260 m y 400 m, en todo el intervalo de observación, $(-80^\circ, 80^\circ)$, tanto para $(\omega + f)$ como para las inclinaciones de los radiotransmisores. El comportamiento suave de la función permite apreciar claramente las variaciones moderadas a medida que cambian los parámetros de los emisores e identificar rápidamente las regiones de máximo.

Los valores de los ángulos, $\theta_1, \dots, \theta_5$, que forman las posiciones de los respectivos satélites, S_1, \dots, S_5 , con los segmentos que unen las posiciones de los radiotransmisores con las de cada satélite, en función de i y de $(\omega + f)$, se muestran en las figuras (3.4) a (3.8). Estos ángulos fueron definidos en las ecuaciones (2.3.4), (2.3.5) y en

la figura (2.5). Obsérvese que, aunque el patrón es muy similar, los valores para cada ángulo son distintos.

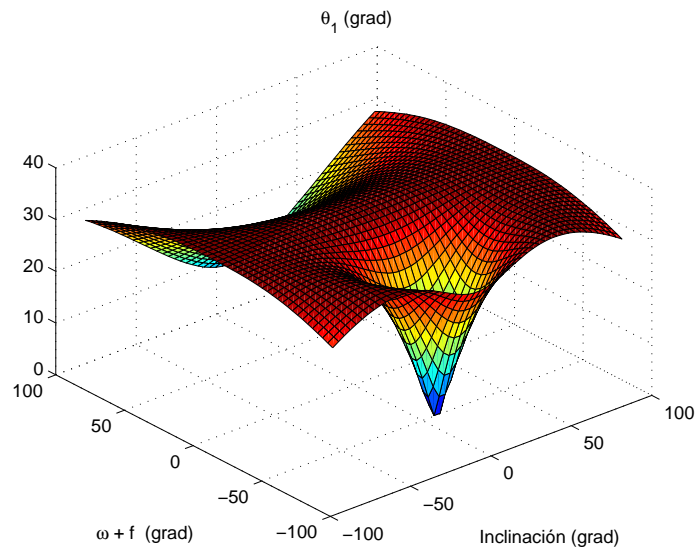


Figura 3.4 – Ángulo θ_1 .

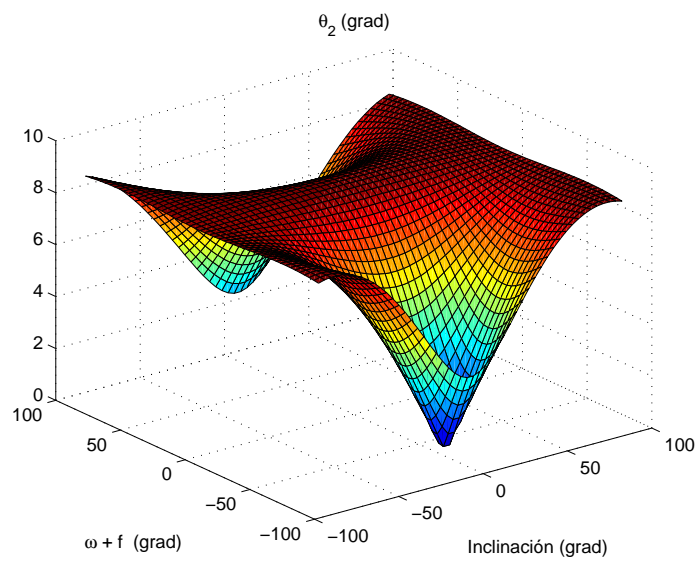


Figura 3.5 – Ángulo θ_2 .

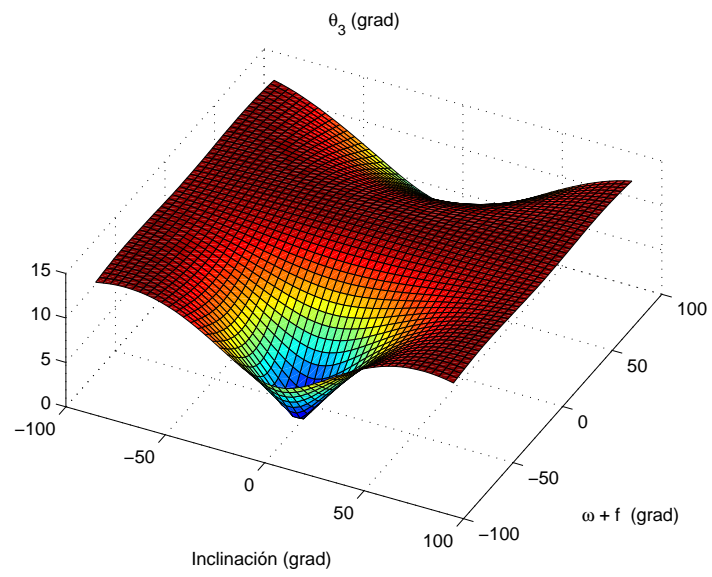


Figura 3.6 – Ángulo θ_3 .

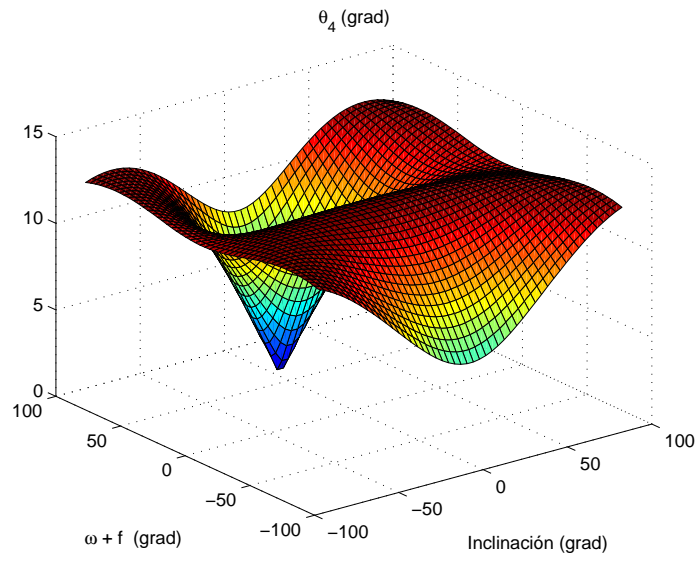


Figura 3.7 – Ángulo θ_4 .

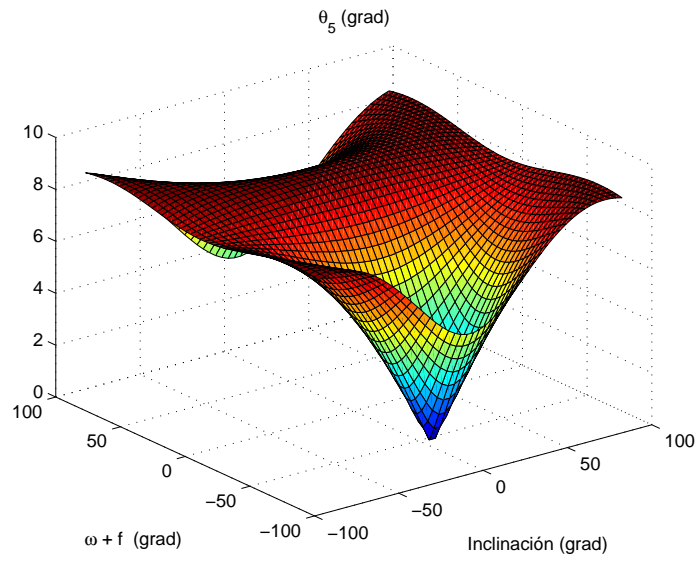


Figura 3.8 – Ángulo θ_5 .

Finalmente, se incluyen tres figuras en las que se representan los tiempos transcu-

rridos desde los instantes de emisión de las señales de los radiotransmisores hasta los de recepción por uno de los satélites: S_5 . En la figura (3.9) se observan los tiempos minkowskianos de llegada de la señal a S_5 y en la figura (3.10), los tiempos posnewtonianos invertidos por la señal en alcanzar este mismo satélite.

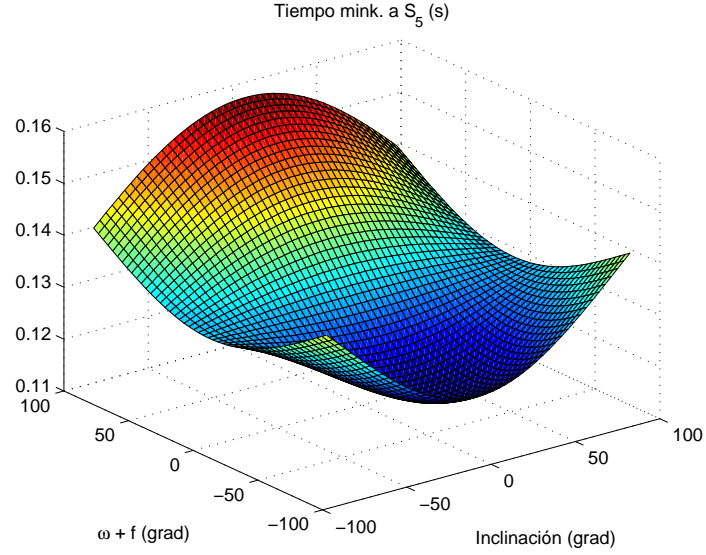


Figura 3.9 – *Tiempos minkowskianos de llegada de la señal a S_5 .*

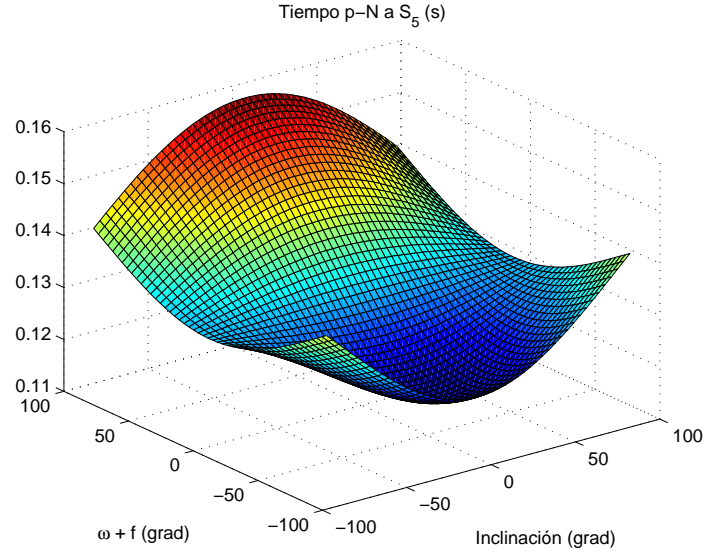


Figura 3.10 – *Tiempos posnewtonianos de llegada de la señal a S_5 .*

Nótese que no es posible distinguir la figura (3.10) de la (3.9) pues la escala de tiempos utilizada no permite establecer diferencias dado que estas son varios órdenes de magnitud menores, como se muestra en la figura (3.11). En efecto, las diferencias son de $10^{-7}s$ frente a centésimas de segundo. Estamos ante una manifestación más del efecto *time delay* de Shapiro, propio del marco posnewtoniano, que debe ser tenido en cuenta para cada satélite.

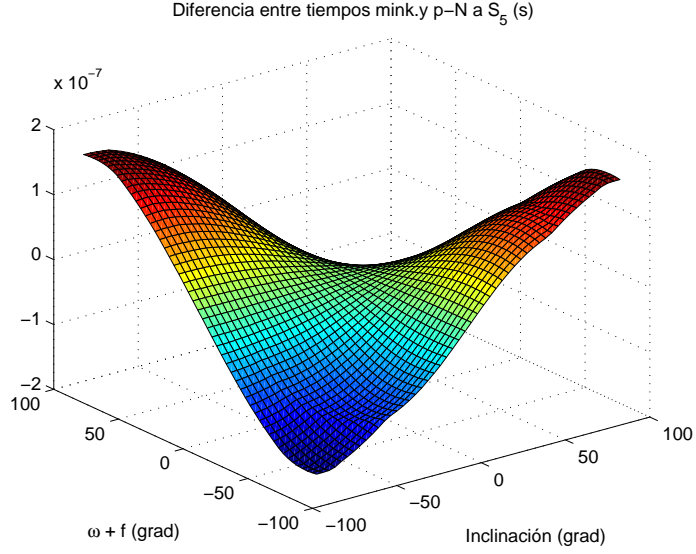


Figura 3.11 – *Diferencias entre tiempos minkowskianos y posnewtonianos de llegada de la señal a S_5 .*

Estos resultados nos reafirman en el hecho de que para conseguir geolocalizaciones útiles, en tiempo real, se debe aumentar la precisión del método estándar y para ello se ha de considerar el espacio-tiempo curvo que rodea a la Tierra lo que, de manera natural, se hace en el modelo posnewtoniano. De otra forma, los errores en la localización del emisor hacen que la determinación de cualquier magnitud obtenida a partir de la posición y de los ángulos en el instante de emisión resulte con errores aumentados.

3.3. Las ecuaciones FDOA

Mediante la geolocalización FDOA se determinan las componentes de la velocidad del transmisor en el instante de emisión y la frecuencia de la señal emitida ([57]). Por tanto, son cuatro las incógnitas en este problema, de forma que para hallar su solución basta plantear un sistema de cuatro ecuaciones. En el procedimiento TDOA, estudiado previamente, quedó de manifiesto que cualquier sistema de tres ecuaciones que no incluyera los cinco satélites no proporcionaba solución única, al no ser linealmente independiente. De la misma manera, en las ecuaciones FDOA,

necesitamos involucrar al menos cinco satélites, si queremos sistemas linealmente independientes [3].

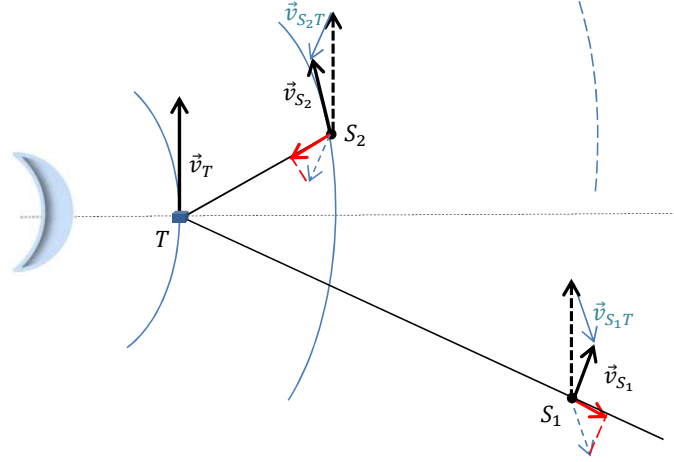


Figura 3.12 – *Proyecciones de \vec{v}_{S_1T} y \vec{v}_{S_2T} en las respectivas direcciones LOS (en rojo).*

Por otro lado, es interesante detenerse un instante en la diferencia

$$u_{(2)}^\alpha (v_{S_2}^\alpha - v_T^\alpha) - u_{(1)}^\alpha (v_{S_1}^\alpha - v_T^\alpha) \quad (3.3.1)$$

de la ecuación FDOA (3.1.15). Podemos visualizar gráficamente su magnitud, que depende de la posición de los dos satélites respecto del radiotransmisor: la contribución varía notablemente si cada receptor se encuentra a un lado de la recta que une el origen ECI con el punto donde se halla el radiotransmisor en el instante de emisión, figura 3.12, respecto de la que se produce cuando ambos satélites, S_1 y S_2 , están situados a un mismo lado de dicha recta, cuando reciben la señal, figura 3.13. Además como el transmisor está en movimiento respecto de los satélites, la situación cambia constantemente. Y esto para todas las parejas de satélites que intervengan en la operación. Todo ello hace difícil preestablecer una configuración ideal en la que se obtenga una mayor precisión en el procedimiento FDOA y que simplifique los cálculos.

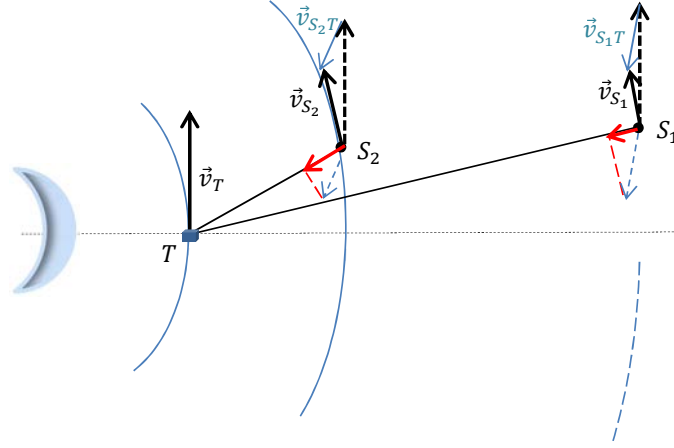


Figura 3.13 – Los receptores S_1 y S_2 se encuentran a un mismo lado de la recta que une el origen ECI con el punto donde se halla el transmisor. De nuevo se indican en rojo las proyecciones de \vec{v}_{S_1T} y \vec{v}_{S_2T} en las respectivas direcciones LOS.

3.3.1. Ecuaciones en el modelo minkowskiano

A partir de ecuaciones FDOA como la (3.1.15) construimos el sistema de cuatro ecuaciones que necesitamos para determinar las tres componentes de la velocidad del radiotransmisor y la frecuencia de emisión. Vamos a comprobar que utilizando únicamente cuatro satélites obtenemos un sistema linealmente dependiente. Consideremos, pues, los satélites S_1 a S_4 , con los que se registran, por ejemplo, los datos FDOA siguientes: F_{12} , F_{13} , F_{42} y F_{43} . El sistema que resulta es, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_{(1)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{12} \\ u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{13} \\ u_{(4)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{42} \\ u_{(4)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_T^1 \\ v_T^2 \\ v_T^3 \\ f_T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha - u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha \\ u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha - u_{(3)}^\alpha v_{S_3}^\alpha \\ u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha - u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha \\ u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha - u_{(3)}^\alpha v_{S_3}^\alpha \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

donde, recordemos, $u_{(i)}^\alpha$ son ya datos obtenidos de la localización TDOA, $v_{S_i}^\alpha$ son las componentes espaciales de la velocidad del satélite i , y v_T^α y f_T son, respectivamente, las componentes espaciales de la velocidad del transmisor, en el instante de emisión, y la frecuencia de la señal emitida, con $i = 1, \dots, 4$ y $\alpha = 1, \dots, 3$.

El sistema (3.3.2) se escribe en forma compacta como $\mathbb{A} \vec{v} = \mathbb{B}$.

Pues bien, realizando con la matriz \mathbb{A} de coeficientes las operaciones elementales que se señalan, obtenemos la matriz equivalente siguiente:

$$\begin{aligned} 1^a - 2^a &\rightarrow \begin{pmatrix} u_{(3)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(3)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(3)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{12} + F_{13} \\ u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{13} \\ u_{(4)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{42} \\ u_{(2)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(2)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(2)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{43} + F_{42} \end{pmatrix} \\ 4^a - 3^a &\rightarrow \end{aligned}$$

Una nueva operación elemental da como resultado:

$$4^a + 1^a \rightarrow \begin{pmatrix} u_{(3)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(3)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(3)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{12} + F_{13} \\ u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{13} \\ u_{(4)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{42} \\ 0 & 0 & 0 & -F_{43} + F_{42} - F_{12} + F_{13} \end{pmatrix}$$

Resolviendo las sumas de la última columna y teniendo en cuenta que $F_{ij} = f_i - f_j$, se llega a:

$$\begin{pmatrix} u_{(3)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(3)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(3)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{32} \\ u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{13} \\ u_{(4)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente, por tanto, que (3.3.2) es un sistema de ecuaciones linealmente dependiente, como habíamos anticipado.

Se comprueba que cualquier combinación que involucre únicamente cuatro satélites produce un sistema de ecuaciones FDOA linealmente dependiente. Por tanto, necesitamos incluir, al menos, cinco satélites ya sean los utilizados en la geolocalización TDOA, ya otros. Consideremos, por consiguiente, mediciones FDOA tomadas de pares en los que intervienen cinco satélites. Una opción es, por ejemplo, los siguientes cuatro datos: F_{12} , F_{13} , F_{42} y F_{45} . Nótese que el único que cambia respecto de la elección arriba considerada es el último, que incluye la medida del satélite S_5 .

El sistema de ecuaciones FDOA es ahora:

$$\begin{pmatrix} u_{(1)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{12} \\ u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1 & u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2 & u_{(1)}^3 - u_{(3)}^3 & -F_{13} \\ u_{(4)}^1 - u_{(2)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(2)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(2)}^3 & -F_{42} \\ u_{(4)}^1 - u_{(5)}^1 & u_{(4)}^2 - u_{(5)}^2 & u_{(4)}^3 - u_{(5)}^3 & -F_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_T^1 \\ v_T^2 \\ v_T^3 \\ f_T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha - u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha \\ u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha - u_{(3)}^\alpha v_{S_3}^\alpha \\ u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha - u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha \\ u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha - u_{(5)}^\alpha v_{S_5}^\alpha \end{pmatrix}$$

Para que este nuevo sistema FDOA proporcione solución única el determinante de la matriz \mathbf{A} de los coeficientes y el vector \mathbf{B} de los términos independientes han de ser no nulos. La obtención de una matriz triangular, como se hizo en el caso TDOA, nos permite establecer condiciones sobre la disposición de los satélites. Enunciamos las dos primeras, que se obtienen por un proceso de eliminación gaussiana [58]:

Primera condición:

$$u_{(1)}^1 - u_{(2)}^1 \neq 0 \quad (3.3.3)$$

Las componentes x de los vectores unitarios que se indican no pueden tener el mismo valor. Esta condición tiene dos implicaciones:

1. Los satélites S_1 y S_2 no pueden estar alineados con el transmisor T .
2. Las proyecciones de los vectores $\overrightarrow{TS_1}$ y $\overrightarrow{TS_2}$ sobre cualquier plano que contenga al eje X no pueden ser simétricas respecto de dicho eje.

Estos resultados pueden mostrarse más evidentes si se hace uso de los cosenos directores de los ángulos $\theta_{(1)}^1$ y $\theta_{(2)}^1$ de los vectores $u_{(1)}^\alpha$ y $u_{(2)}^\alpha$ con el eje X , es decir, si se expresa (3.3.3) como:

$$\cos \theta_{(1)}^1 \neq \cos \theta_{(2)}^1,$$

dado que

$$u_{(i)}^1 = \frac{x_{S_i}^1 - x_T^1}{r_i} = \cos \theta_{(i)}^1,$$

siendo $r_i = |x_{S_i}^\gamma - x_T^\gamma|$, con $i = 1, 2$.

La segunda condición es

$$(u_{(1)}^2 - u_{(3)}^2)(u_{(1)}^1 - u_{(2)}^1) - (u_{(1)}^2 - u_{(2)}^2)(u_{(1)}^1 - u_{(3)}^1) \neq 0, \quad (3.3.4)$$

que podemos escribir, utilizando los cosenos directores, como

$$\begin{aligned} & - \cos \theta_{(1)}^2 \cos \theta_{(2)}^1 - \cos \theta_{(3)}^2 \cos \theta_{(1)}^1 + \cos \theta_{(3)}^2 \cos \theta_{(2)}^1 \\ & + \cos \theta_{(1)}^2 \cos \theta_{(3)}^1 + \cos \theta_{(2)}^2 \cos \theta_{(1)}^1 - \cos \theta_{(2)}^2 \cos \theta_{(3)}^1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

El hecho de expresar (3.3.4) en la forma (3.3.5), no nos aporta una gran ventaja salvo en la situación en que el radiotransmisor y los satélites S_1 , S_2 y S_3 se encuentren en el plano ecuatorial. En este caso particular, puesto que $\cos \theta_{(i)}^2 = \sin \theta_{(i)}^1$, se tiene (v. figura 3.14):

$$\begin{aligned} & - \sin \theta_{(1)}^1 \cos \theta_{(2)}^1 - \sin \theta_{(3)}^1 \cos \theta_{(1)}^1 + \sin \theta_{(3)}^1 \cos \theta_{(2)}^1 \\ & + \sin \theta_{(1)}^1 \cos \theta_{(3)}^1 + \sin \theta_{(2)}^1 \cos \theta_{(1)}^1 - \sin \theta_{(2)}^1 \cos \theta_{(3)}^1 \neq 0, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

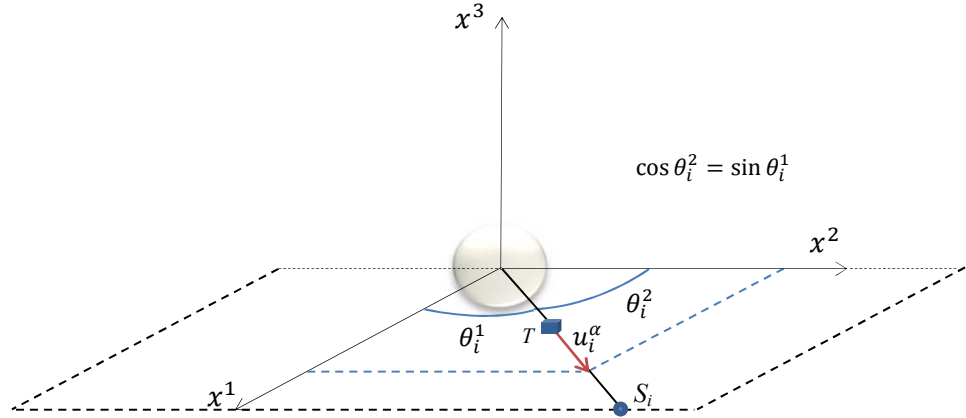


Figura 3.14 – Radiotransmisor T y satélite S_i en el plano ecuatorial

que se reduce a

$$\sin(\theta_2^1 - \theta_1^1) + \sin(\theta_3^1 - \theta_2^1) + \sin(\theta_1^1 - \theta_3^1) \neq 0. \quad (3.3.7)$$

Para diferencias pequeñas de ángulos, la relación (3.3.7) se aproxima, en primer orden, a

$$(\theta_2^1 - \theta_1^1) + (\theta_3^1 - \theta_2^1) + (\theta_1^1 - \theta_3^1) \neq 0. \quad (3.3.8)$$

Una condición más exige que los términos independientes no se anulen, de forma que se ha de tener

$$u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha \neq u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha$$

$$u_{(1)}^\alpha v_{S_1}^\alpha \neq u_{(3)}^\alpha v_{S_3}^\alpha$$

$$u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha \neq u_{(2)}^\alpha v_{S_2}^\alpha$$

$$u_{(4)}^\alpha v_{S_4}^\alpha \neq u_{(5)}^\alpha v_{S_5}^\alpha,$$

lo que significa que para cada par de satélites S_1S_2 , S_1S_3 , S_4S_2 y S_4S_5 , las componentes de las velocidades de cada uno según su dirección LOS han de ser distintas.

Si se prefiere, se pueden escribir estas condiciones en función de los ángulos:

$$|v_{S_i}^\alpha| \cos \theta_{(i)}^{LOS} \neq |v_{S_j}^\alpha| \cos \theta_{(j)}^{LOS} \quad (3.3.9)$$

para cada pareja S_iS_j , siendo $\theta_{(i)}^{LOS}$ el ángulo formado por $v_{S_i}^\alpha$ con la dirección LOS de S_i a T , y de modo correspondiente para j .

Para el caso en que los módulos de la velocidad de S_i y de S_j sean iguales, en los respectivos instantes de recepción, es decir, para $|v_{S_i}^\alpha| = |v_{S_j}^\alpha|$, la expresión (3.3.9) se convierte en

$$\cos \theta_{(i)}^{LOS} \neq \cos \theta_{(j)}^{LOS} \quad (3.3.10)$$

Obtenemos, de esta manera, una nueva condición angular entre satélites, que requiere que las diferencias angulares sean grandes.

No obstante, a partir de la relación (3.3.9) se observa que las restricciones no solo conciernen a los ángulos, sino también a las distancias, involucradas a través de las velocidades $|v_{S_i}^\alpha|$ de los satélites.

En general, en este nuevo sistema FDOA se pueden establecer condiciones para evitar que la matriz \mathbb{A} de los coeficientes sea singular. Esto, que analíticamente resultaría tedioso, se estudia detenidamente en el capítulo cuatro, donde por medio de simulaciones numéricas, se prueban series de configuraciones de, al menos, cinco satélites y, a la vista de los resultados numéricos, se analiza la conveniencia de cada disposición satelital para la localización más eficiente y precisa del radiotransmisor.

3.3.2. Ecuaciones en el modelo posnewtoniano

A partir de la ecuación (3.1.16), siguiendo un procedimiento análogo al realizado en la aproximación minkowskiana, se llega a la ecuación matricial

$$\tilde{\mathbb{A}}v' = \tilde{\mathbb{B}} \quad (3.3.11)$$

donde

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} u_{(1)}^1(1 - C_1) - u_{(2)}^1(1 - C_2), & \cdots, & u_{(1)}^3(1 - C_1) - u_{(2)}^3(1 - C_2), & -F_{12} \\ u_{(1)}^1(1 - C_1) - u_{(3)}^1(1 - C_3), & \cdots, & u_{(1)}^3(1 - C_1) - u_{(3)}^3(1 - C_3), & -F_{13} \\ u_{(4)}^1(1 - C_4) - u_{(2)}^1(1 - C_2), & \cdots, & u_{(4)}^3(1 - C_4) - u_{(2)}^3(1 - C_2), & -F_{42} \\ u_{(4)}^1(1 - C_4) - u_{(5)}^1(1 - C_5), & \cdots, & u_{(4)}^3(1 - C_4) - u_{(5)}^3(1 - C_5), & -F_{45} \end{pmatrix}$$

$$v' = \begin{pmatrix} \tilde{v}_T^1 \\ \tilde{v}_T^2 \\ \tilde{v}_T^3 \\ (\tilde{f}_T)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} C_1 - C_2 - \frac{1}{2}H_{12} - M_{12} - (u_{(1)}^\alpha v_T^\alpha)^2 + (u_{(2)}^\alpha v_T^\alpha)^2 \\ C_1 - C_3 - \frac{1}{2}H_{13} - M_{13} - (u_{(1)}^\alpha v_T^\alpha)^2 + (u_{(3)}^\alpha v_T^\alpha)^2 \\ C_4 - C_2 - \frac{1}{2}H_{42} - M_{42} - (u_{(4)}^\alpha v_T^\alpha)^2 + (u_{(2)}^\alpha v_T^\alpha)^2 \\ C_4 - C_5 - \frac{1}{2}H_{45} - M_{45} - (u_{(4)}^\alpha v_T^\alpha)^2 + (u_{(5)}^\alpha v_T^\alpha)^2 \end{pmatrix},$$

siendo $C_i = u_{(i)}^\gamma v_{S_i}^\gamma$, $H_{ij} = [(v_{S_i})^2 - (v_{S_j})^2]$, $M_{ij} = [m/r_{S_i} - m/r_{S_j}]$, con $i, j = 1, \dots, 5$.

Los términos cuadráticos que aparecen al plantear las ecuaciones, dado que son no lineales, se resuelven por iteración a partir de los valores obtenidos en la aproximación minkowskiana. Evidentemente, una buena práctica consiste en escoger los mismos satélites que realizan las mediciones TDOA. De esta forma, utilizando los resultados $u_{(i)}^\alpha$ proporcionados por estos satélites el sistema se realimenta en tiempo real.

Las condiciones para la solución única de este sistema se determinan de modo análogo a como se hizo en las ecuaciones minkowskianas.

Partiendo de la ecuación (3.1.17) se obtiene el mucho más sencillo sistema de ecuaciones para el caso alineado:

$$\begin{pmatrix} D_{21} u^1 & D_{21} u^2 & D_{21} u^3 & -F_{12} \\ D_{31} u^1 & D_{31} u^2 & D_{31} u^3 & -F_{13} \\ D_{24} u^1 & D_{24} u^2 & D_{24} u^3 & -F_{42} \\ D_{54} u^1 & D_{54} u^2 & D_{54} u^3 & -F_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_T^1 \\ \tilde{v}_T^2 \\ \tilde{v}_T^3 \\ (\tilde{f}_T)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{21} + \frac{1}{2}H_{21} - D_{21} \\ M_{31} + \frac{1}{2}H_{31} - D_{31} \\ M_{24} + \frac{1}{2}H_{24} - D_{24} \\ M_{54} + \frac{1}{2}H_{54} - D_{54} \end{pmatrix},$$

donde $D_{ij} = (v_{S_i}^\alpha - v_{S_j}^\alpha)u^\alpha$.

Comparando los sistemas de ecuaciones en las dos aproximaciones resulta inmediato identificar los términos cinemáticos y gravitatorios que aparecen en las correcciones posnewtonianas.

3.3.3. Ejemplo de geolocalización por FDOA

Al igual que se hizo al final de la sección 3.2, para TDOA, se muestra aquí un ejemplo de procedimiento FDOA, que satisface las condiciones que acabamos de establecer. Los resultados evidencian las diferencias de velocidades calculadas mediante las aproximaciones minkowskiana y posnewtoniana. Se pueden obtener diferencias de velocidades significativas situando los satélites a distancias angulares grandes. Para ello, consideramos una constelación formada por tres satélites GEO y dos MEO, con los siguientes elementos orbitales:

$$S_1: \quad \Omega_1 = -60.01^\circ; \quad i_1 = 0.5^\circ; \quad (\omega + f)_1 = 0.5^\circ; \quad r_1 = 0.14002 \text{ s}$$

S_2 :	$\Omega_2 = -60.01^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = 60.01^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.097002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = -60.01^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.5^\circ$;	$r_4 = 0.14002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 60.01^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.097002 \text{ s}$.

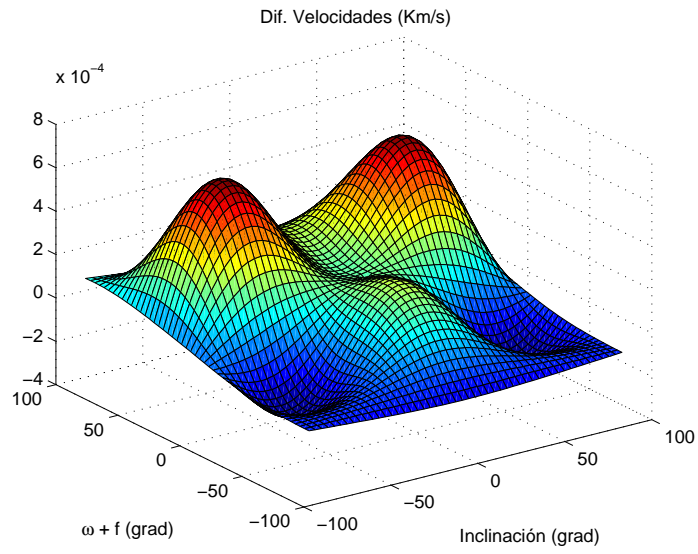


Figura 3.15 – *Diferencias entre velocidades minkowskianas y posnewtonianas de los radiotransmisores en los instantes de emisión.*

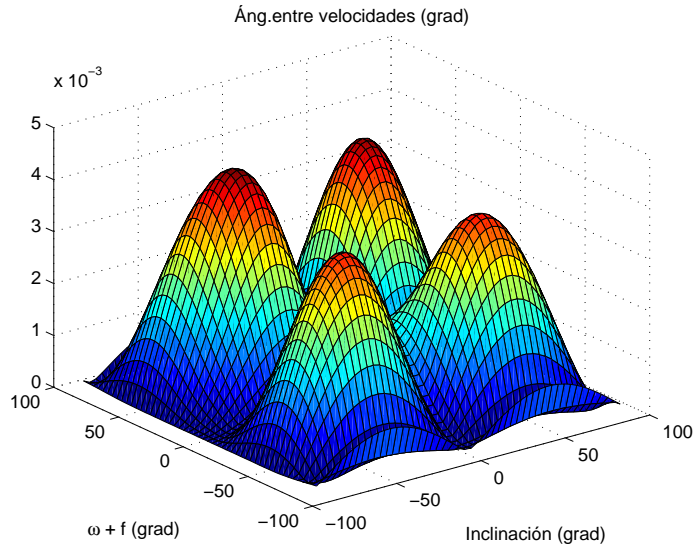


Figura 3.16 – *Ángulos entre velocidades minkowskianas y posnewtonianas.*

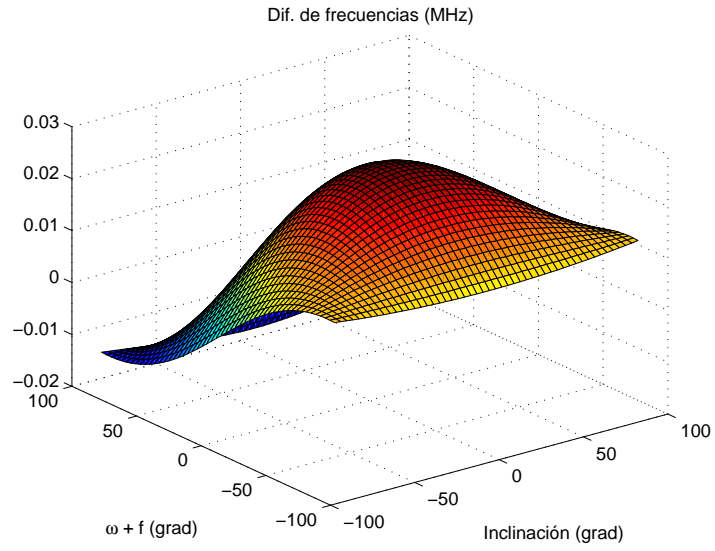


Figura 3.17 – *Diferencias de frecuencias minkowskianas y posnewtonianas.*

Las figuras (3.15), (3.16) y (3.17) muestran las diferencias de velocidades, el ángulo

entre velocidades y las diferencias de frecuencias, respectivamente, entre las magnitudes minkowskianas y posnewtonianas. Es destacable que, de nuevo, el dominio de observación abarca el intervalo completo $(-80^\circ, 80^\circ)$.

3.4. Resumen

La relación de partida para la obtención de las ecuaciones TDOA y la del tiempo es la aparentemente simple igualdad $\Omega(P_1 P_2) = 0$, que es equivalente a decir que los sucesos P_1 y P_2 están unidos por una señal electromagnética. Una vez halladas las funciones de universo para el entorno de la Tierra, se deducen las ecuaciones TDOA minkowskiana y posnewtoniana. Esta última, en su forma más general, ecuación (3.1.7), involucra tiempos de recepción, distancias y ángulos. Las correcciones posnewtonianas dan cuenta, asimismo, del efecto *time-delay* de Shapiro, que no ocurre en el modelo minkowskiano.

De la relación (2.2.2) para el desplazamiento relativo en frecuencias se deducen las ecuaciones FDOA, igualdades (3.1.15) a (3.1.17). La aproximación posnewtoniana añade cuatro términos a la ecuación minkowskiana, de los cuales dos están siempre presentes cualesquiera que sean las posiciones relativas de satélites y emisores, es decir, aportan siempre contribuciones que aumentan la precisión lograda con el modelo minkowskiano.

Dado que la geolocalización de un emisor depende fuertemente de la geometría, como se señaló en el capítulo uno, las configuraciones de satélites receptores deben ser estudiadas pormenorizadamente puesto que se requiere solución única de los sistemas de ecuaciones formados. Además, como el método se basa en la elección de pares de satélites resulta que los sistemas de ecuaciones deben involucrar, al menos, cinco receptores. En suma, el estudio de la compatibilidad de dichos sistemas implica establecer condiciones analíticas que se han de probar en escenarios realistas mediante simulaciones numéricas. No obstante, se puede anticipar, a la vista de lo estudiado en este capítulo, que se alcanza mayor precisión en la operación TDOA cuanto mayor sea la diferencia de distancias del transmisor a los satélites y se consigue una FDOA más precisa cuanto mayores sean las distancias angulares entre ellos.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

El método de geolocalización que se propone combina dos técnicas de gran precisión, TDOA y FDOA, en una sola. Si bien, como ya se ha señalado a lo largo de esta tesis, esta técnica conjunta se ha venido utilizando desde hace décadas, proporcionando el mismo o mayor nivel de precisión en las localizaciones que las técnicas individuales de las que parte, es cierto que su uso se ha limitado únicamente al cálculo de posiciones ([59]). Puede parecer, en principio, redundante destinar dos potentes métodos a una misma función y a un mismo objetivo. Sin embargo, son varias las razones que se podrían argumentar para explicar la utilización que se ha hecho hasta ahora de la técnica TDOA-FDOA: en primer lugar, la necesidad impuesta de minimizar el error en el cálculo y la imposibilidad de recurrir a medidas reiteradas, en aquellos escenarios donde se requiere una respuesta en tiempo real, fundamentalmente en el caso de emisores en movimiento; en segundo término, al tratarse de dos técnicas de inmediata interpretación geométrica, la complementariedad de una y otra surge de manera natural cuando se busca una localización única (en la sección 1.4 se expuso como la intersección de los hiperboloides TDOA con las superficies de igual FDOA en forma de huso reducía el número de posibles localizaciones del radiotransmisor); por último, razones de economía de medios pueden ser esgrimidas en favor del uso de TDOA-FDOA para la determinación de la posición de un objeto que emite señales de radiofrecuencia, dado que dos únicos receptores son suficientes para realizar simultáneamente medidas de tiempo de llegada de la señal y de diferencia de frecuencias a los mismos, en determinadas situaciones de procedimientos de geolocalización de ámbito local en la superficie de la Tierra.

En nuestro caso, disponemos de un método de localización precisa exclusivamente mediante TDOA, desarrollado y verificado para obtener una geolocalización única ([30]). A partir de esto, observamos que la técnica FDOA se muestra sumamente

versátil si se le proporcionan datos de posición instantáneos de los receptores en movimiento relativo, que utiliza para medir diferencias en frecuencias de la señal recibida. Por tanto, esta técnica se puede consagrar enteramente a determinar la velocidad del emisor en el instante de emisión y la frecuencia de la señal emitida. Dado que se puede escribir una ecuación para cada componente espacial de la velocidad, no solo se halla el módulo de esta en ese instante sino además su dirección. Esta es la tarea a la que se han dedicado los esfuerzos de esta tesis. Debemos, seguidamente, someter las ecuaciones obtenidas en las dos aproximaciones estudiadas en los capítulos anteriores, a las pruebas necesarias para demostrar su utilidad, su viabilidad y ver si cumplen las expectativas de aumento significativo en la precisión para las que han sido desarrolladas. Además, una prueba de realidad consistirá en lograr un procedimiento eficiente en el que se contemple un desarrollo que invite a ser llevado a la práctica, con el menor gasto posible. En definitiva, efectividad y racionalidad económica deben ayudar a nuestro objetivo.

Con esta mira se desarrollan en este capítulo simulaciones en las que se prueban las configuraciones de satélites receptores que se han obtenido en el capítulo tres. Allí se discutió que se han de utilizar al menos cinco satélites para localización única y para una única solución FDOA. A partir de ahí las posibilidades son infinitas. Ahora bien, analíticamente se llegaba a las condiciones que deben satisfacer determinados satélites, por un lado para las ecuaciones TDOA y, por otro, para las FDOA. Ellas dan la pauta para elegir los parámetros de los satélites involucrados y se puede extraer una primera conclusión que afirma que cuanto mayor sea la diferencia de distancias de los satélites al emisor, mejores resultados para distinguir las posiciones minkowskianas de las posnewtonianas, y cuanto mayor distancia angular entre satélites desde el emisor, mayores diferencias de las velocidades obtenidas en una y otra aproximaciones. Sin embargo en la práctica, como se verá, existe una restricción física impuesta por el ancho del haz emitido por el radiotransmisor, de forma que una gran distancia angular impone una pérdida de precisión, que está establecida entre 1 y 2 grados ([60], [61], [62]).

Comenzamos con las simulaciones en que se utilizan más de cinco satélites. Esto inicia lo que llamaremos la *serie 1*. Así, en la simulación *1.1* el dominio de observación es amplio, con $\omega + f$ dentro del intervalo $(-50^\circ, 60^\circ)$ y las inclinaciones en $(-80^\circ, 80^\circ)$:

Los satélites que se utilizan tienen los elementos orbitales siguientes:

$$S_1: \quad \Omega_1 = 40^\circ; \quad i_1 = 0.5^\circ; \quad (\omega + f)_1 = 0.5^\circ; \quad r_1 = 0.037002 \text{ s}$$

$$S_2: \quad \Omega_2 = -70^\circ; \quad i_2 = 0^\circ; \quad (\omega + f)_2 = 0^\circ; \quad r_2 = 0.14002 \text{ s}$$

S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 46.8^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -10^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = 40^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$
S_7 :	$\Omega_7 = 46.8^\circ$;	$i_7 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_7 = 0.5^\circ$;	$r_7 = 0.14002 \text{ s}$.

Las mediciones TDOA las realizan los cinco primeros, es decir, S_1 a S_5 y las FDOA, los satélites S_2 , S_3 , S_5 , S_6 y S_7 .

Con esta configuración se encuentran diferencias de distancias grandes, entre 200 m y 450 m, como se aprecia en la figura 4.1. El comportamiento para los ángulos θ_2 y θ_5 , elegidos como representativos, se puede seguir en las figuras 4.2 y 4.3, respectivamente; el mínimo para θ_5 se encuentra para un radiotransmisor en $(\omega + f) = -7^\circ$, con una inclinación de 0° . Asimismo, las diferencias de tiempos minkowskiano y posnewtoniano se muestran en la figura 4.4.

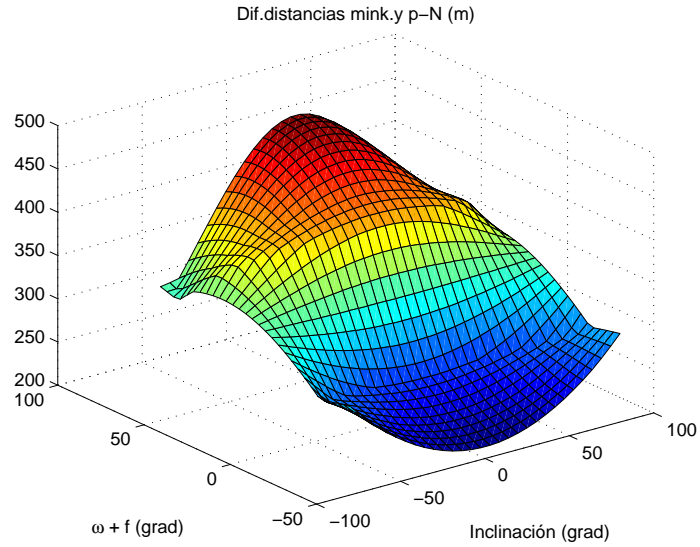


Figura 4.1

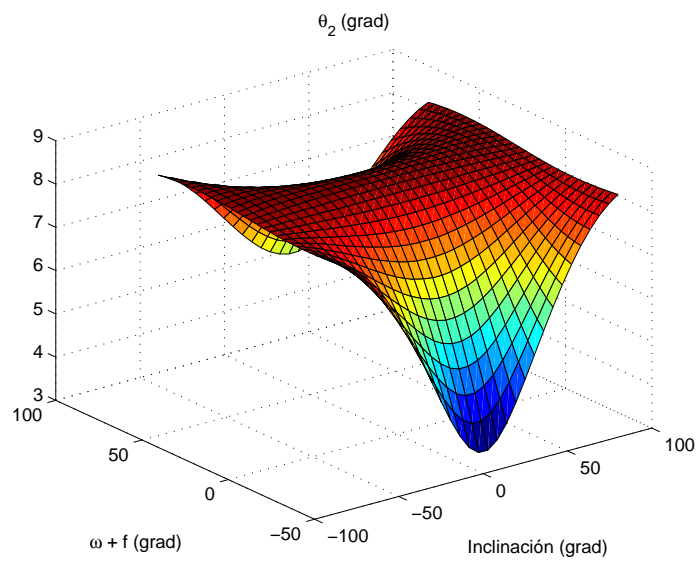


Figura 4.2

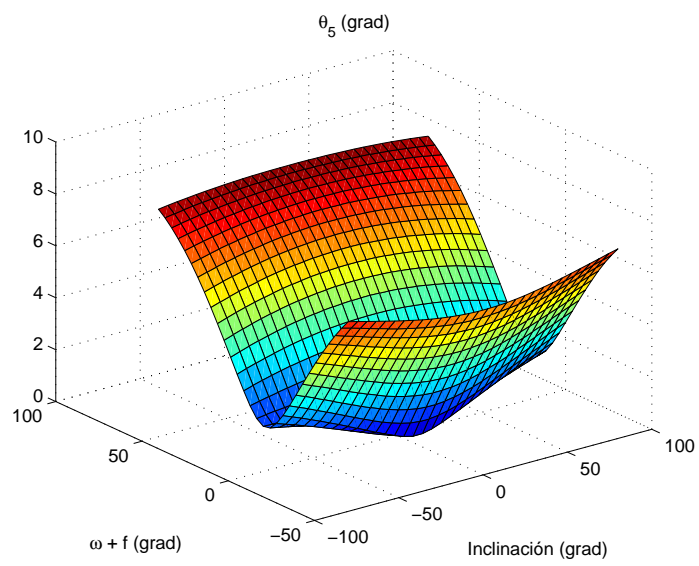


Figura 4.3

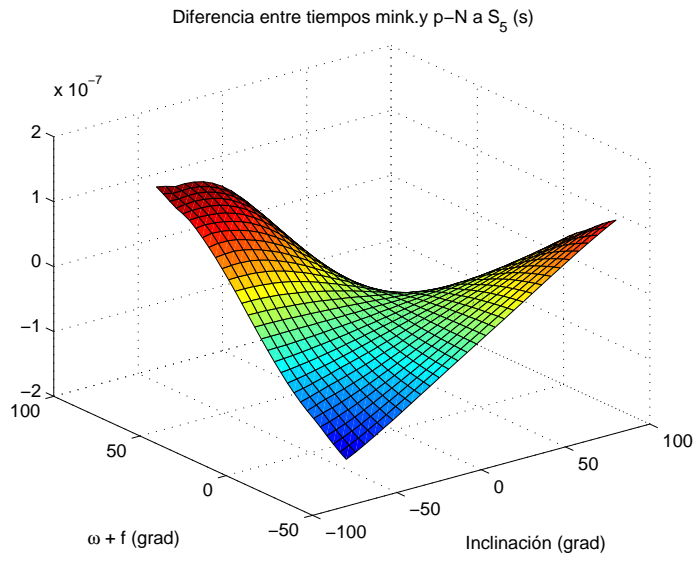


Figura 4.4

Las diferencias de velocidades están entre -0.2 y 0.2 km/s , figura 4.5. Los ángulos entre velocidades alcanzan dos máximos de 2.8° y 3.7° , figura 4.6, y las diferencias de frecuencias llegan a -50 MHz , figura 4.7.

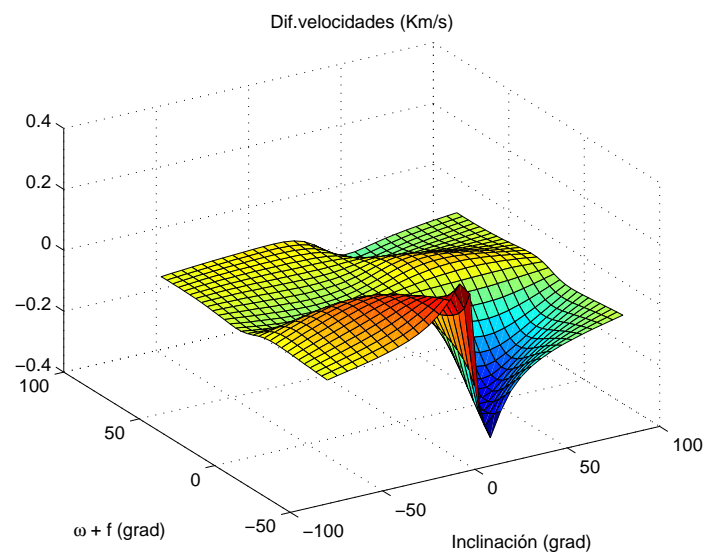


Figura 4.5

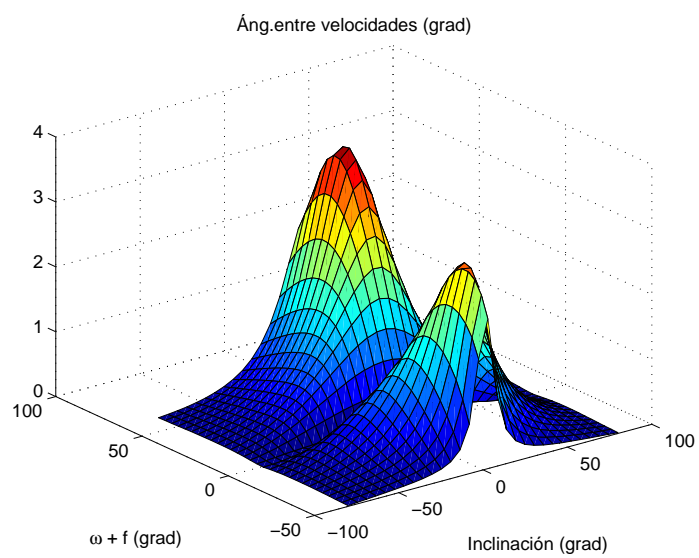


Figura 4.6

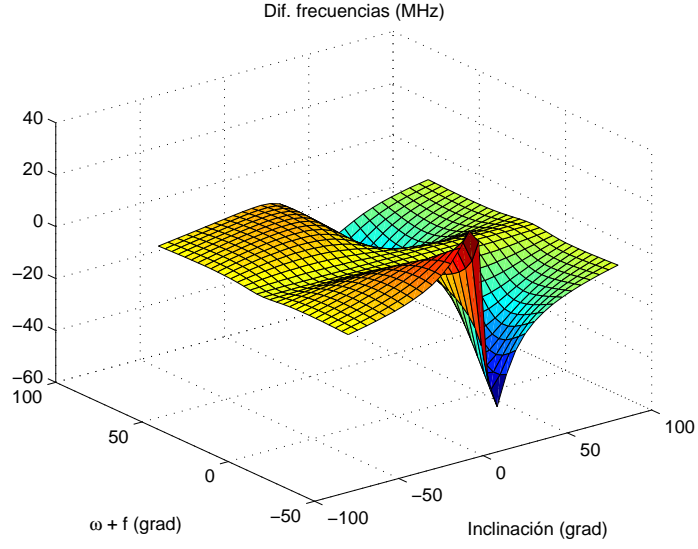


Figura 4.7

En la siguiente simulación, 1.2, se utiliza un satélite más. Con esta disposición, la diferencia de distancias se mantiene en los valores de la simulación 1.1, como se ve en la figura 4.8. Ahora bien, el dominio de observación se ha reducido al intervalo $(40^\circ, 50^\circ)$, para $(\omega + f)$, y la inclinación a $(60^\circ, 70^\circ)$. La configuración satelital es:

S_1 :	$\Omega_1 = 40^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.037002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 46.8^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -10^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = 40^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$
S_7 :	$\Omega_7 = 46.8^\circ$;	$i_7 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.5^\circ$;	$r_7 = 0.14002 \text{ s}$.

$$S_8: \quad \Omega_8 = -10^\circ; \quad i_8 = 0^\circ; \quad (\omega + f)_8 = 0^\circ; \quad r_8 = 0.097002 \text{ s}.$$

Los satélites S_1 a S_5 registran las mediciones TDOA y los S_2, S_3, S_6, S_7 y S_8 , las FDOA.

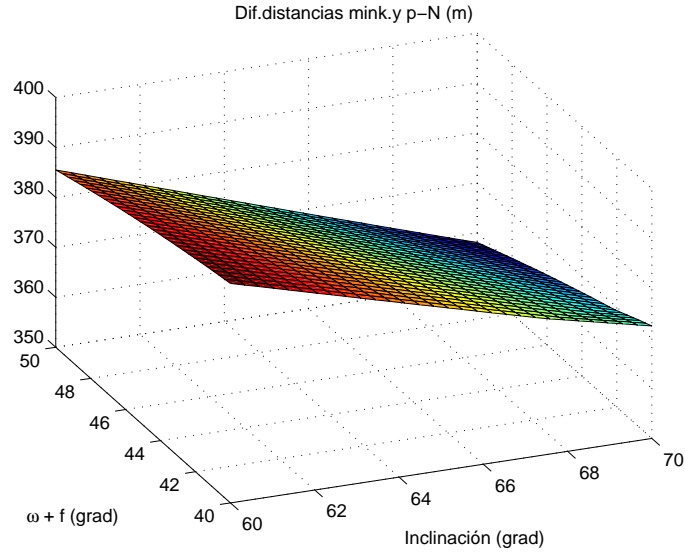


Figura 4.8

Las figuras 4.9 y 4.10 muestran que los ángulos tampoco han variado respecto de la simulación anterior. Las diferencias de tiempos se aprecian en la figura 4.11.

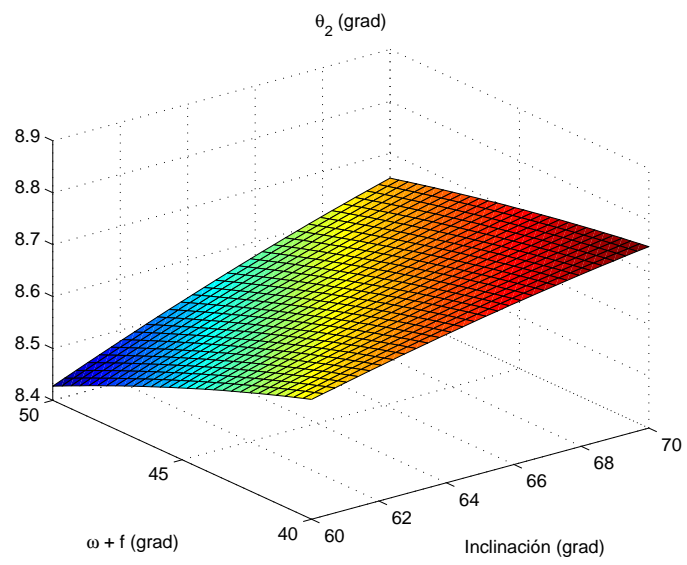


Figura 4.9

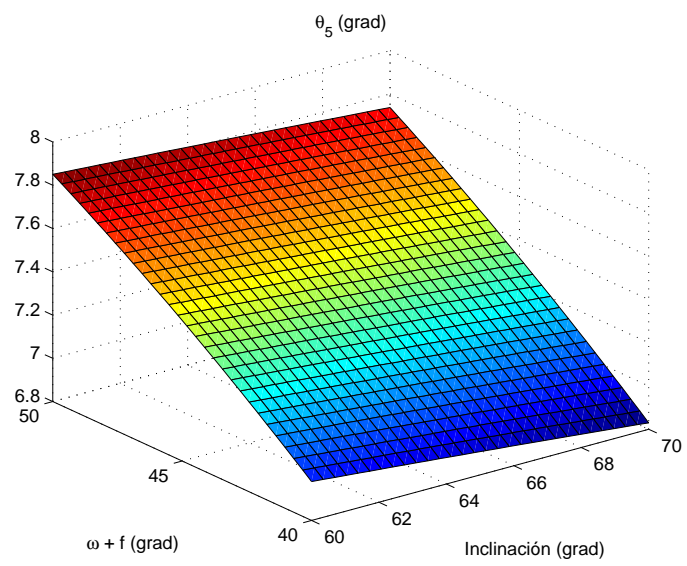


Figura 4.10

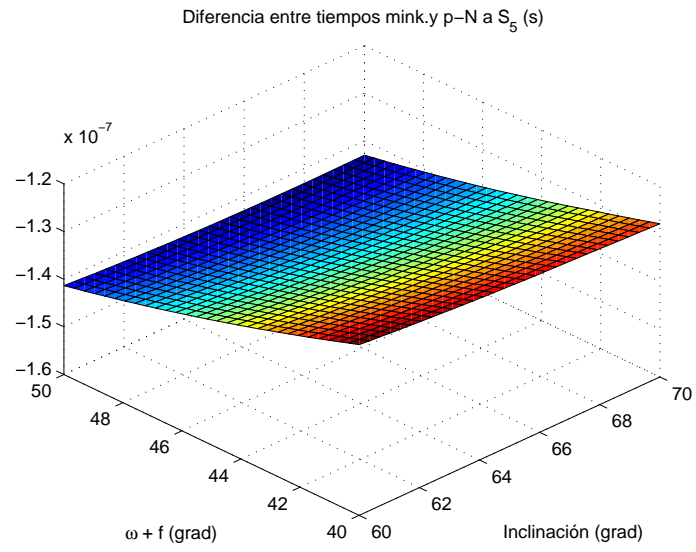


Figura 4.11

Sin embargo, se produce una disminución de la diferencia de velocidades y de los ángulos entre velocidades de tres órdenes de magnitud (figuras 4.12 y 4.13, respectivamente); las diferencias de frecuencias disminuyen, asimismo, en dos órdenes de magnitud (figura 4.14).

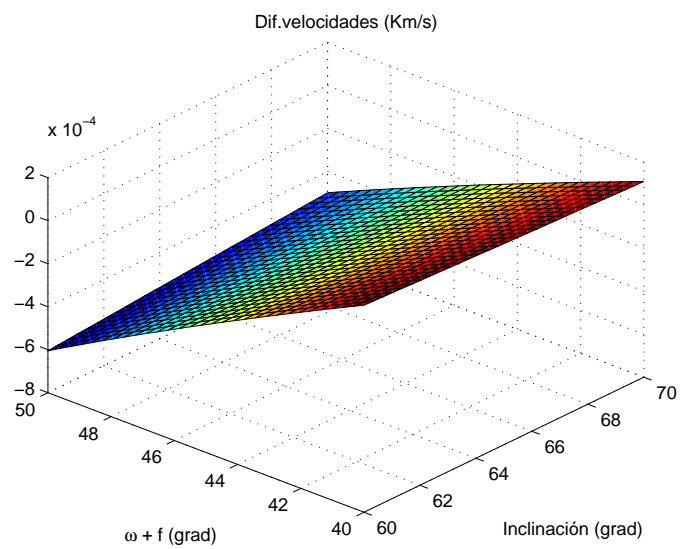


Figura 4.12

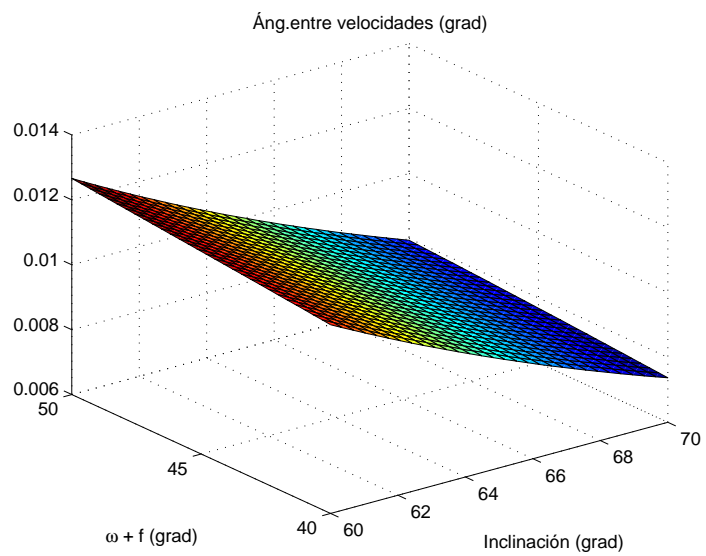


Figura 4.13

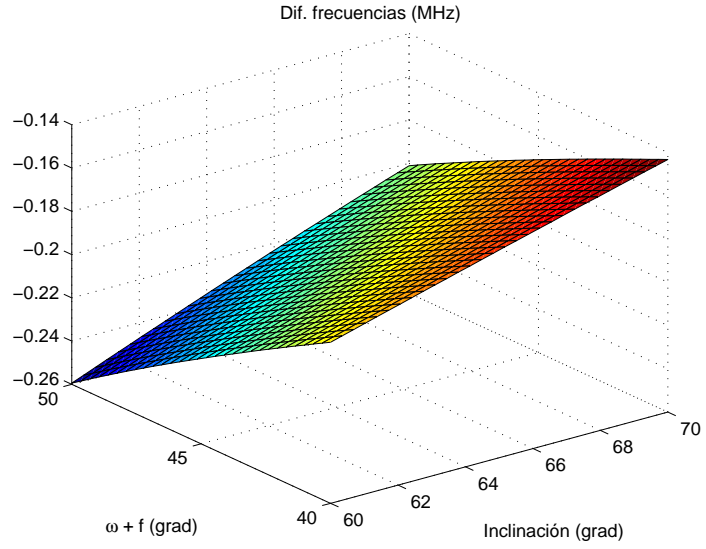


Figura 4.14

Para la simulación 1.3, los satélites se disponen de la siguiente forma:

S_1 :	$\Omega_1 = -60.01^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.037002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -65^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 56.8^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -60^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = -60.01^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$
S_7 :	$\Omega_7 = -60.01^\circ$;	$i_7 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_7 = 0^\circ$;	$r_7 = 0.14002 \text{ s}$
S_8 :	$\Omega_8 = -60.01^\circ$;	$i_8 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_8 = 0.5^\circ$;	$r_8 = 0.14002 \text{ s}$

$$S_9: \quad \Omega_9 = -60^\circ; \quad i_9 = 0^\circ; \quad (\omega + f)_9 = 0^\circ; \quad r_9 = 0.097002 \text{ s}.$$

Los cinco satélites encargados de la operación TDOA son S_1 a S_5 y de la FDOA, los satélites S_3 , S_6 , S_7 , S_8 y S_9 .

Se puede ampliar el intervalo de $(\omega + f)$ a $(0^\circ, 50^\circ)$ y el de las inclinaciones de los radiotransmisores a $(-50^\circ, 50^\circ)$. Las diferencias de distancias mantienen valores estables en torno a los 350 m, como se aprecia en la figura 4.15.

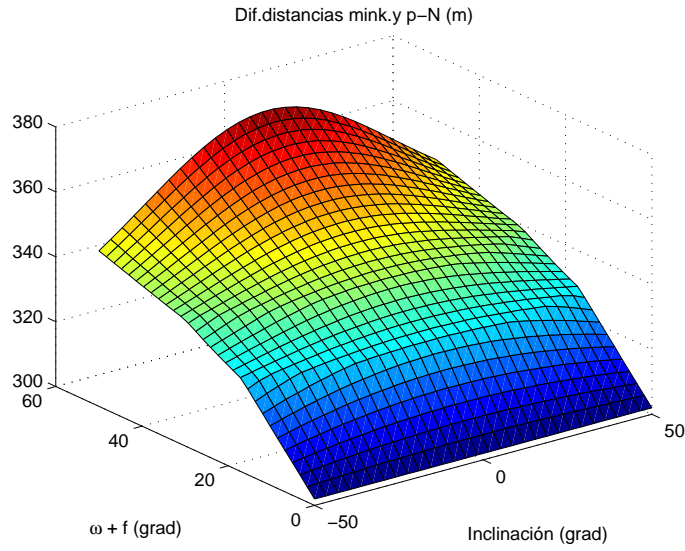


Figura 4.15

Se muestra, en esta ocasión, en la figura 4.16, el ángulo θ_1 correspondiente al satélite S_1 , como ejemplo de valores que se llegan a alcanzar, en torno a 35° .

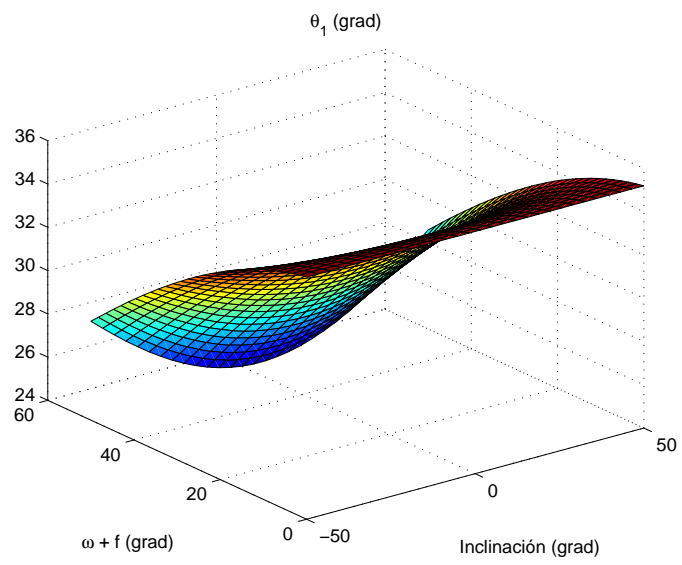


Figura 4.16

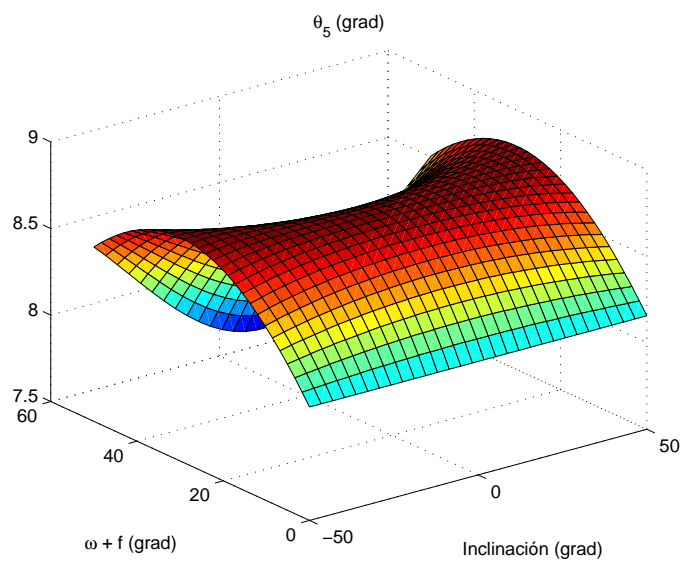


Figura 4.17

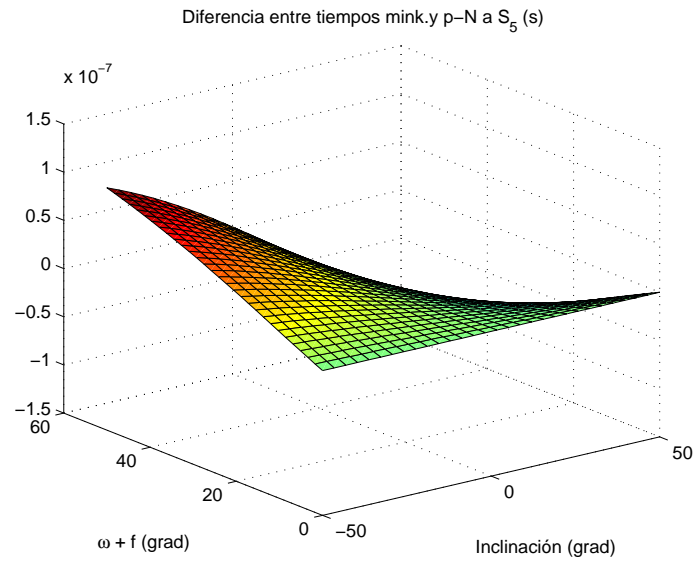


Figura 4.18

Las magnitudes que dependen de las medidas FDOA muestran valores similares a los de la simulación 1.2: la diferencia de velocidades y los ángulos entre velocidades se representan en las figuras 4.19 y 4.20, respectivamente; la diferencia de frecuencias es menor en un orden de magnitud (figura 4.21).

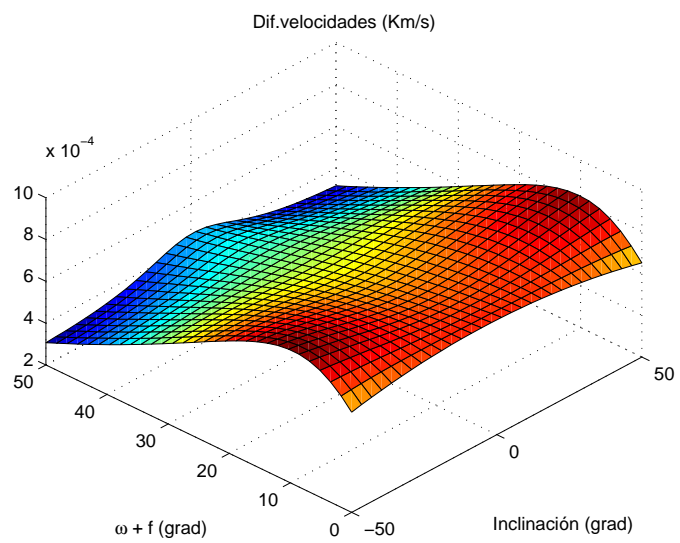


Figura 4.19

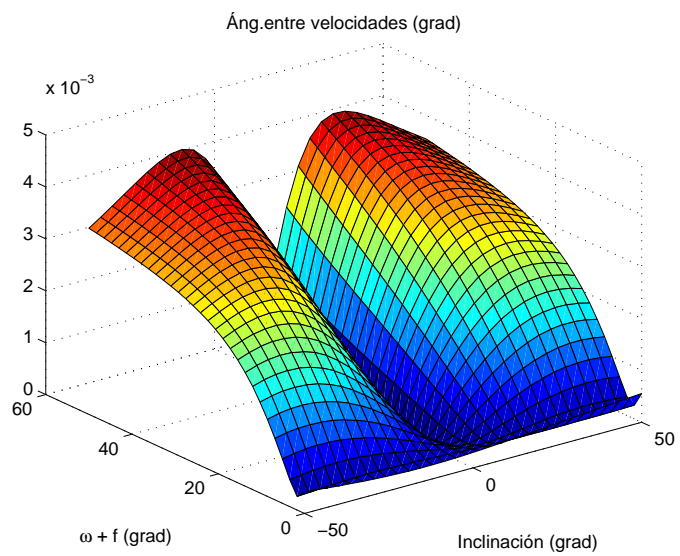


Figura 4.20

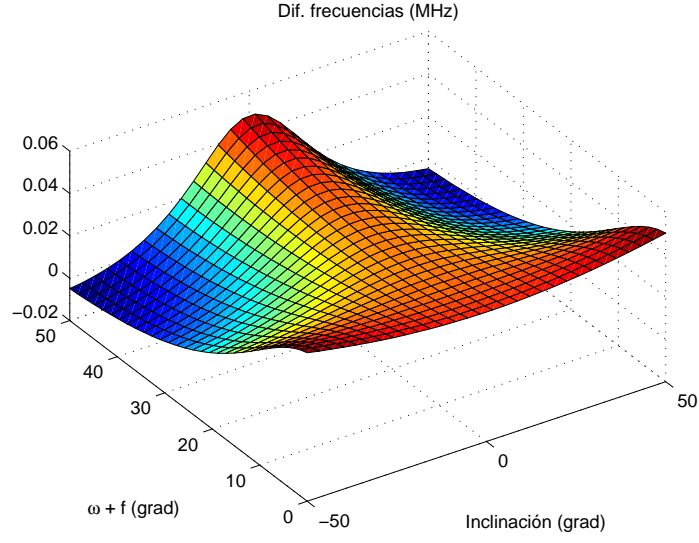


Figura 4.21

En una nueva simulación, 1.4, se vuelve a utilizar siete satélites, dispuestos de la siguiente forma:

S_1 :	$\Omega_1 = 10^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.037002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 46.8^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -10^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = 10^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$
S_7 :	$\Omega_7 = 46.8^\circ$;	$i_7 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_7 = 0^\circ$;	$r_7 = 0.14002 \text{ s}$.

S_1 a S_5 hacen las mediciones TDOA y S_2 , S_3 , S_5 , S_6 y S_7 , las FDOA.

El intervalo de observación es $(0^\circ, 90^\circ)$ para $(\omega + f)$ y $(-90^\circ, 90^\circ)$ para las inclinaciones. Se obtienen diferencias de distancias muy similares a las de las simulaciones anteriores debido a las posiciones de los satélites (véase la figura 4.22), lo que también determina que los ángulos se encuentren en valores aproximados (figuras 4.23 y 4.24). Las diferencias de tiempos de llegada de la señal al satélite S_5 se mantienen en 10^{-7} s (figura 4.25).

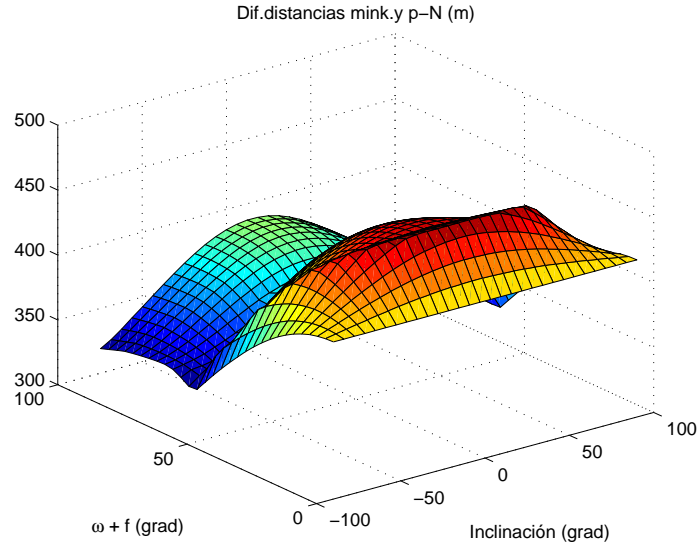


Figura 4.22

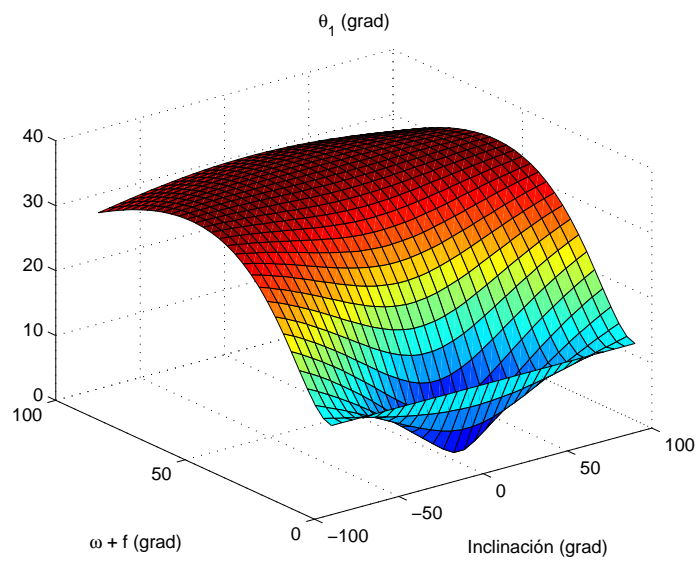


Figura 4.23

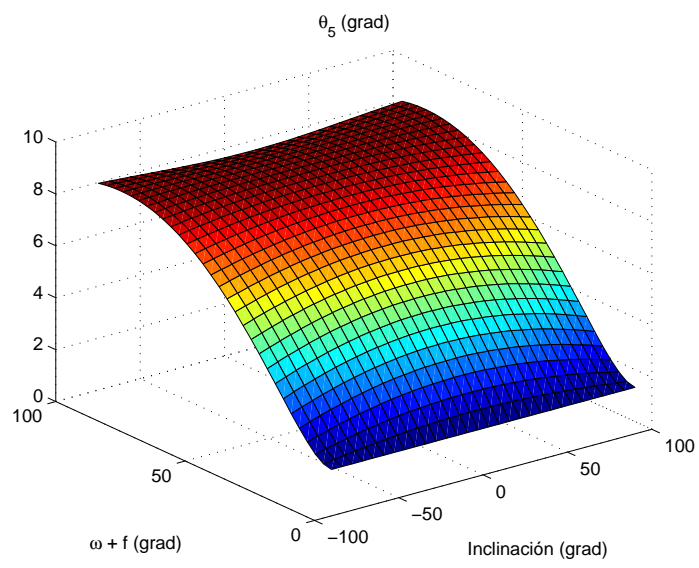


Figura 4.24

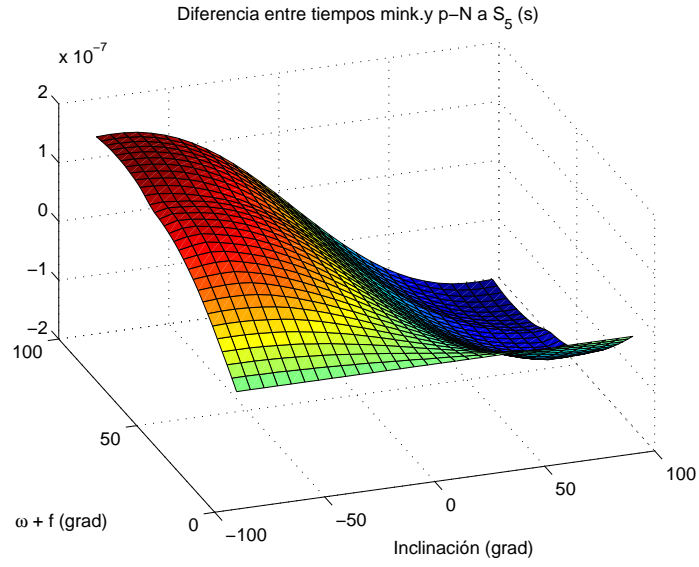


Figura 4.25

Se consigue mejorar sustancialmente los valores pobres obtenidos en la simulación 1.3 para las diferencias de velocidades, los ángulos entre las velocidades y diferencias de frecuencias. Ello es explicable pues allí las distancias angulares se eligieron muy pequeñas y en esta simulación 1.4 se han dispuesto los satélites a distancias angulares grandes, lo cual muestra una vez más que se cumplen las condiciones enunciadas en el capítulo tres, en este caso para el procedimiento FDOA. Los resultados se muestran en las figuras (4.26), (4.27) y (4.28).

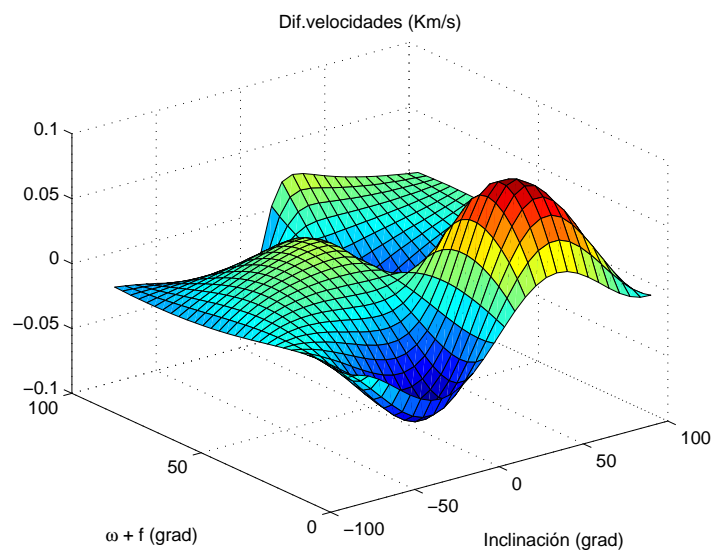


Figura 4.26

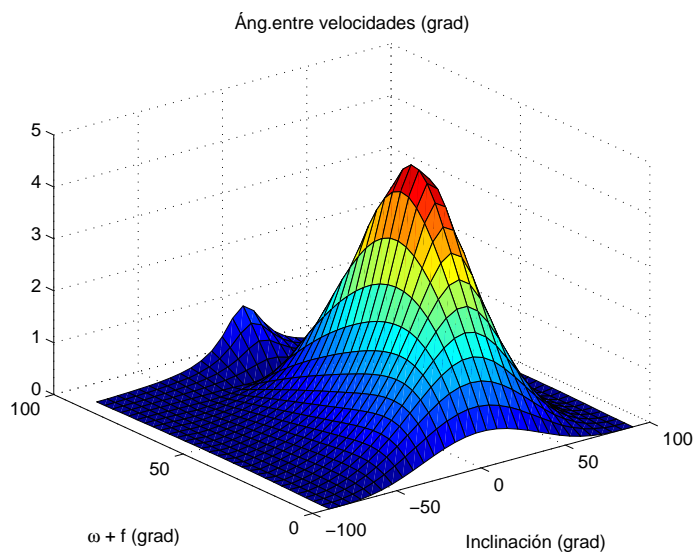


Figura 4.27

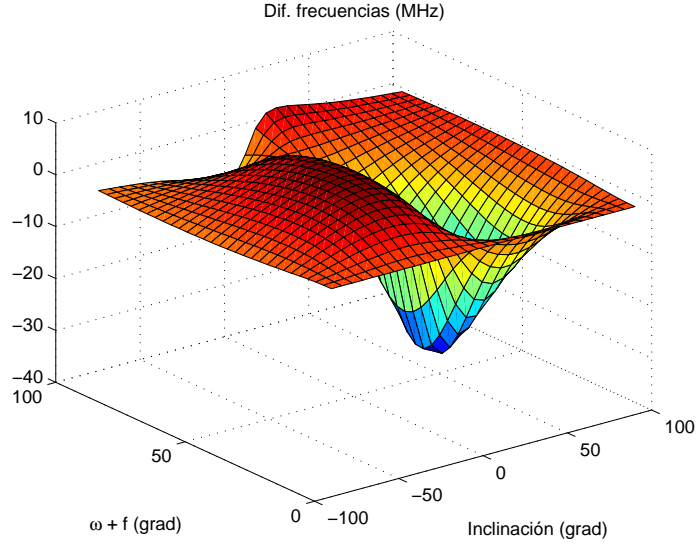


Figura 4.28

Para la simulación 1.5, se escogen los satélites S_1 a S_6 de la simulación anterior y se modifican la longitud del nodo ascendente y la posición del satélite S_4 . El dominio de observación es igual para $(\omega + f)$, y para las inclinaciones de los radiotransmisores se elige el intervalo simétrico $(-50^\circ, 50^\circ)$. La configuración de satélites es:

S_1 :	$\Omega_1 = 10^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.03002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 0^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.14002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -10^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = 10^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$.

S_1 a S_5 se encargan de la operación TDOA y S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 , de la FDOA.

Se encuentran mayores diferencias de distancias, llegando a un máximo de alrededor de 700 m (figura 4.29). Los ángulos y las diferencias de tiempos se apartan poco de lo visto en las anteriores simulaciones (figuras 4.30 a 4.32).

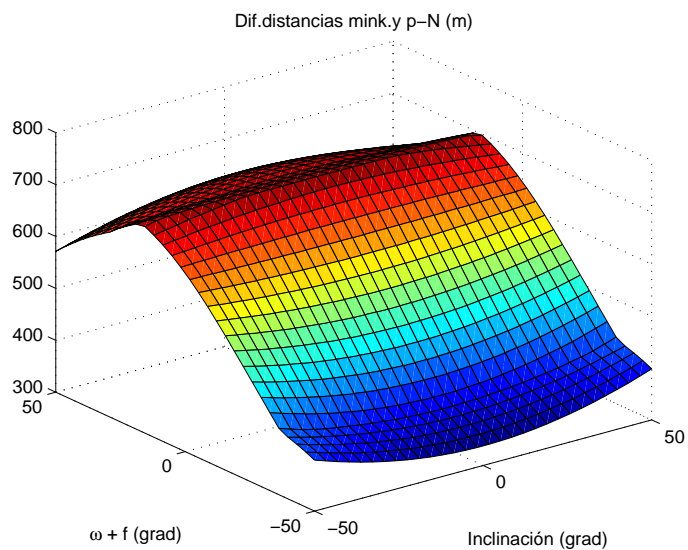


Figura 4.29

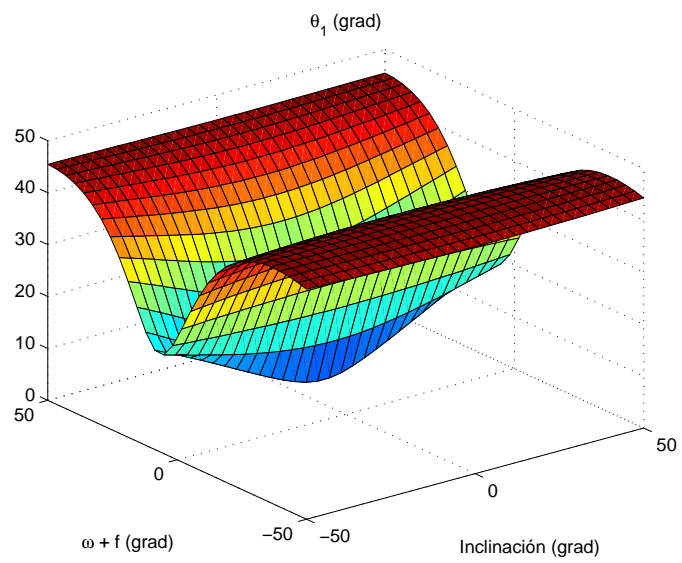


Figura 4.30

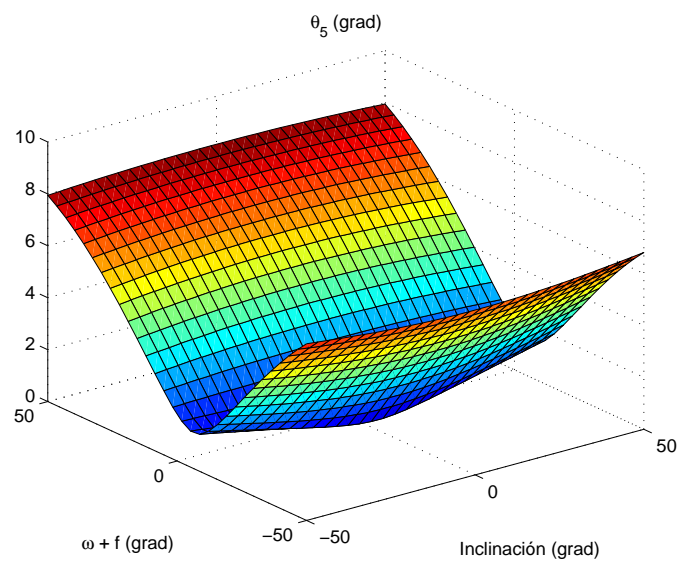


Figura 4.31

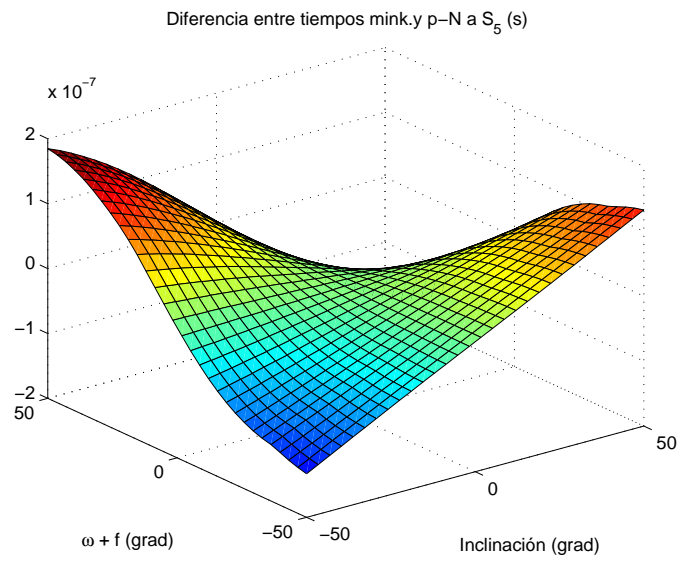


Figura 4.32

Las diferencias de magnitudes relacionadas con FDOA mejoran ligeramente las de la simulación 1.4 (figuras 4.33 a 4.35).

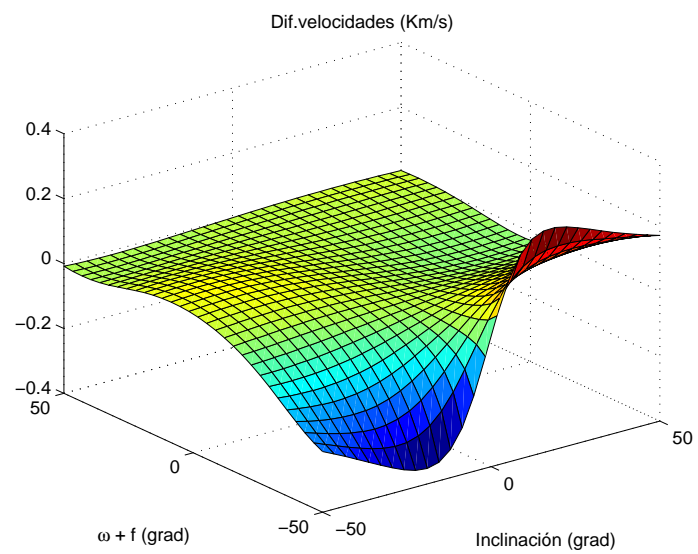


Figura 4.33

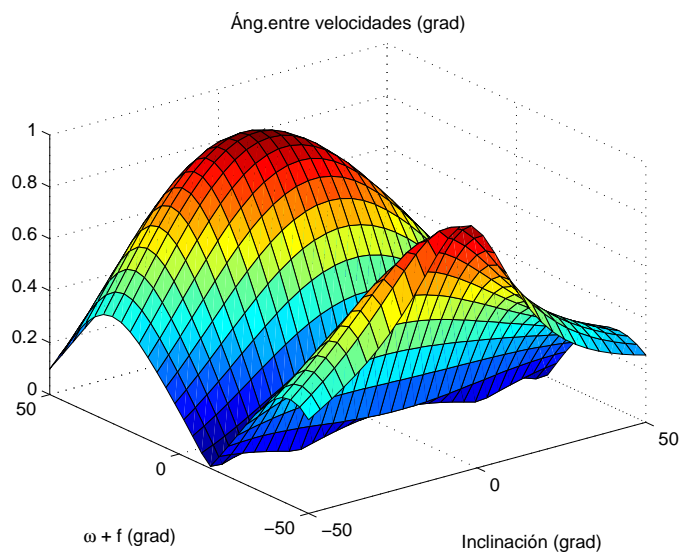


Figura 4.34

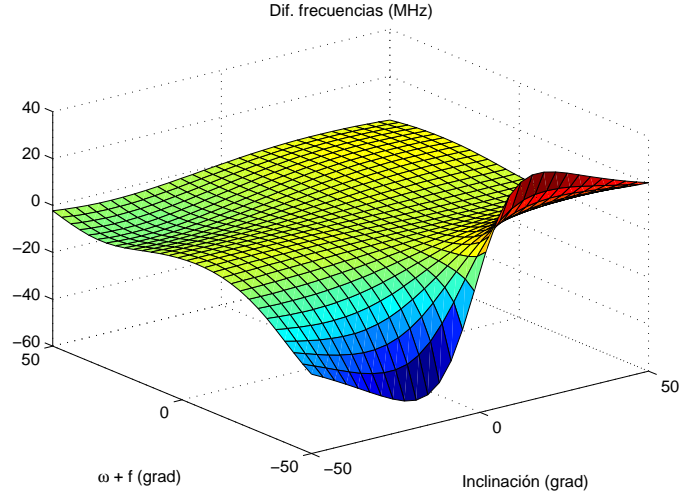


Figura 4.35

En la simulación 1.6 se vuelve a una configuración de ocho satélites. Se mantiene el dominio $(-50^\circ, 50^\circ)$ para las inclinaciones y $(\omega + f)$ recorre el intervalo $(0^\circ, 20^\circ)$. Los satélites tienen los siguientes datos orbitales:

S_1 :	$\Omega_1 = 10^\circ$;	$i_1 = 45^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0^\circ$;	$r_1 = 0.027002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -70^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 20^\circ$;	$r_3 = 0.08002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 6^\circ$;	$i_4 = 35^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.4^\circ$;	$r_4 = 0.04002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 9^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$
S_6 :	$\Omega_6 = 10^\circ$;	$i_6 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_6 = 0.5^\circ$;	$r_6 = 0.14002 \text{ s}$
S_7 :	$\Omega_7 = -55^\circ$;	$i_7 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_7 = 0^\circ$;	$r_7 = 0.09002 \text{ s}$
S_8 :	$\Omega_8 = 46.8^\circ$;	$i_8 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_8 = 0^\circ$;	$r_8 = 0.14002 \text{ s}$.

S_1 a S_5 realizan el procedimiento TDOA y S_2 , S_5 , S_6 , S_7 y S_8 , el FDOA.

En la diferencia de distancias, figura 4.36, se observa una función que crece suavemente y conforma un destacado máximo, que alcanza una cota de 30 metros y se halla centrado en el dominio de observación. Este patrón se invierte para las diferencias de tiempos en las que se observa un mínimo, con un valor en torno a 10^{-8} s (figura 4.39).

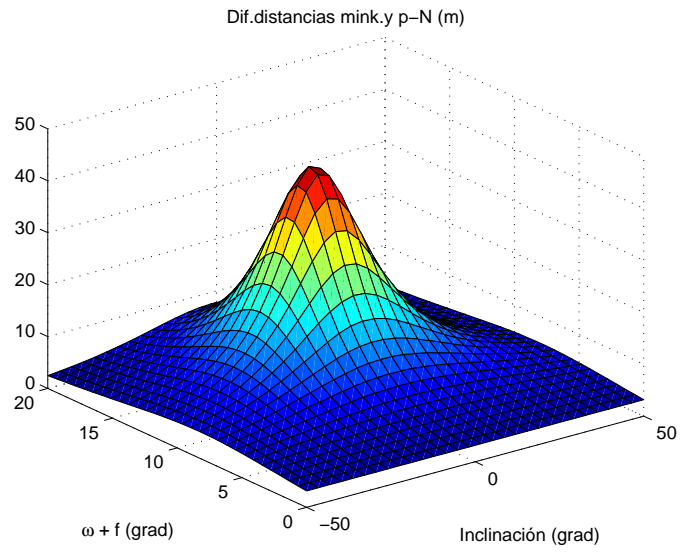


Figura 4.36

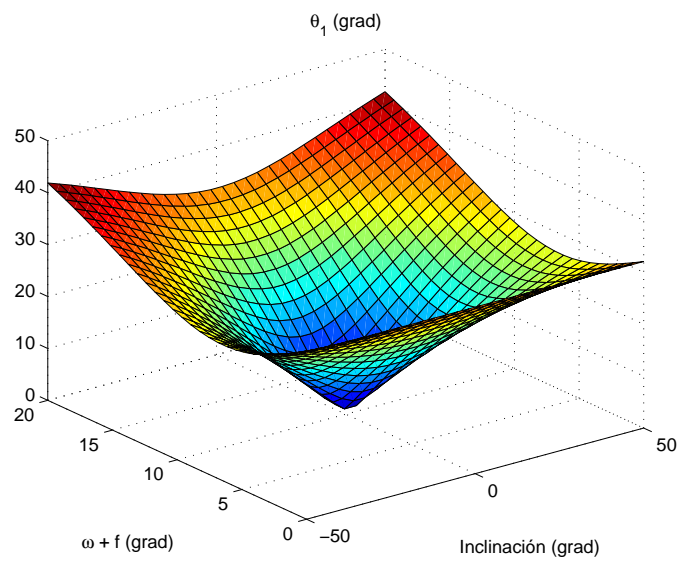


Figura 4.37

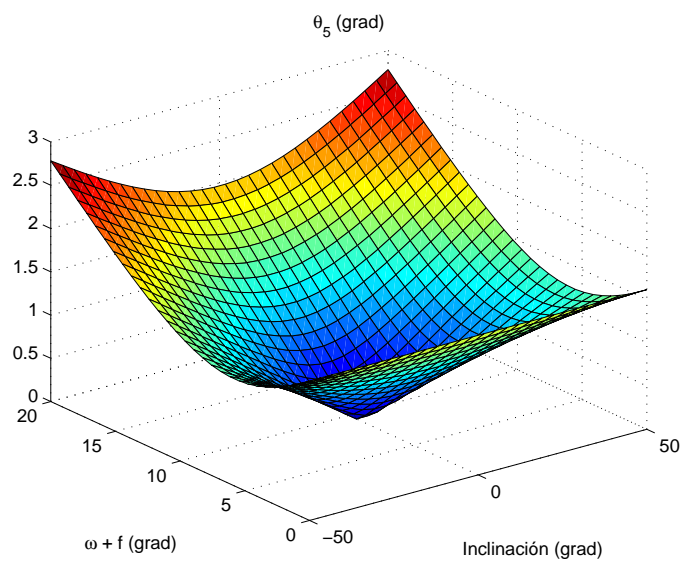


Figura 4.38

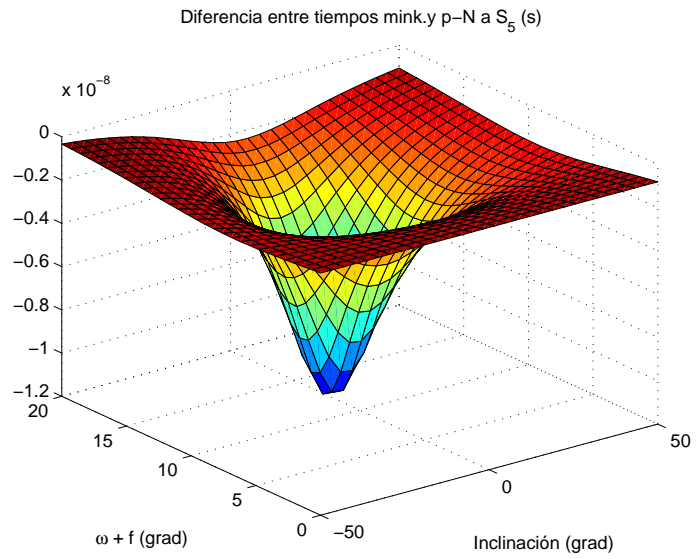


Figura 4.39

En conjunto, en esta simulación se alcanzan diferencias de valores importantes en todas las magnitudes, tanto las que afectan a las posiciones como las relativas a las velocidades y frecuencias. Las gráficas correspondientes a las figuras 4.40 a 4.42 son, también, ejemplos de crecimiento y decrecimiento suaves.

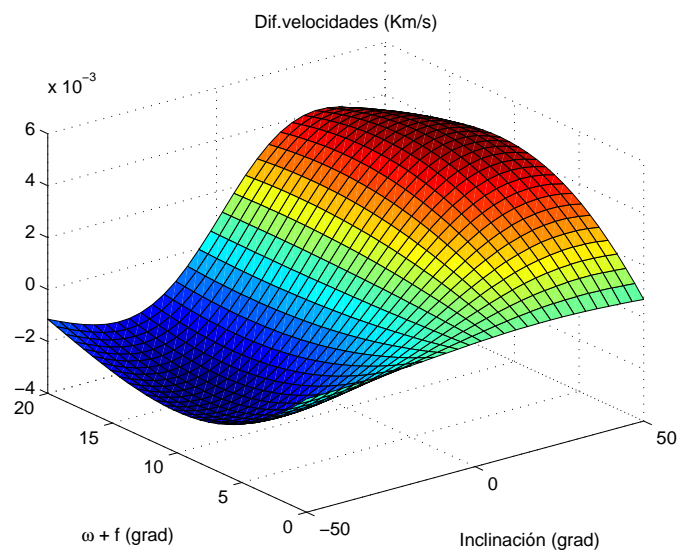


Figura 4.40

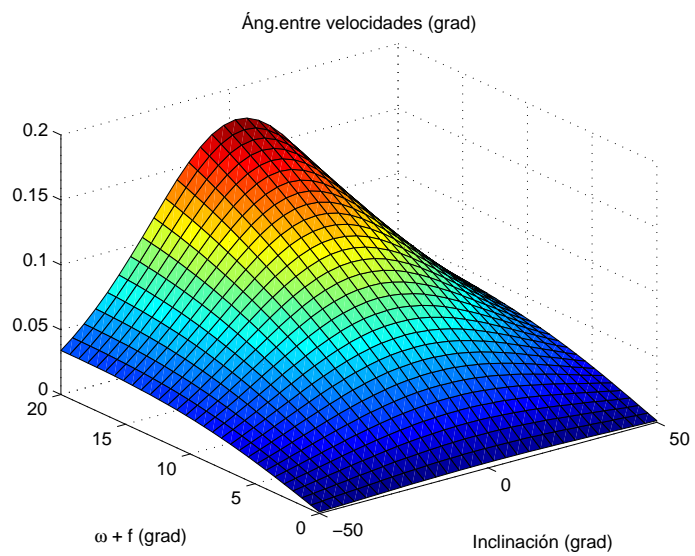


Figura 4.41

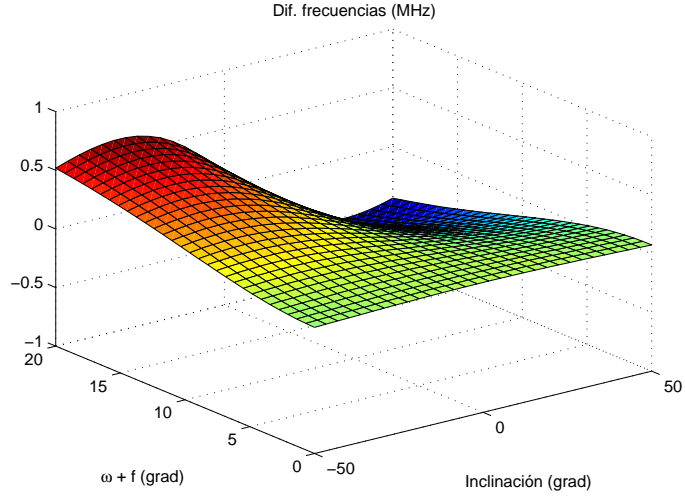


Figura 4.42

Se cierra esta serie con una última simulación, *1.7*, que podría decirse de transición ya que es una configuración de cinco únicos satélites que realizan los dos procedimientos, TDOA y FDOA, y sirve de enlace a las que siguen a continuación, en la *serie 2*, todas ellas de cinco satélites. Los elementos orbitales del conjunto de receptores son:

S_1 :	$\Omega_1 = 6^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.057002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -4^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = 65^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = -36^\circ$;	$i_4 = 0.2^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.097002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 50^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

El intervalo para $(\omega + f)$ es $(20^\circ, 55^\circ)$ y para las inclinaciones, $(80^\circ, 90^\circ)$. Las diferencias de distancias alcanzan todavía valores importantes, como se puede ver en la figura 4.43, y los ángulos se muestran en los órdenes ya vistos en las anteriores

simulaciones (figs. 4.44 y 4.45). Las diferencias de tiempos son de 10^{-8} s, igual que en la simulación 1.6 (figura 4.46).

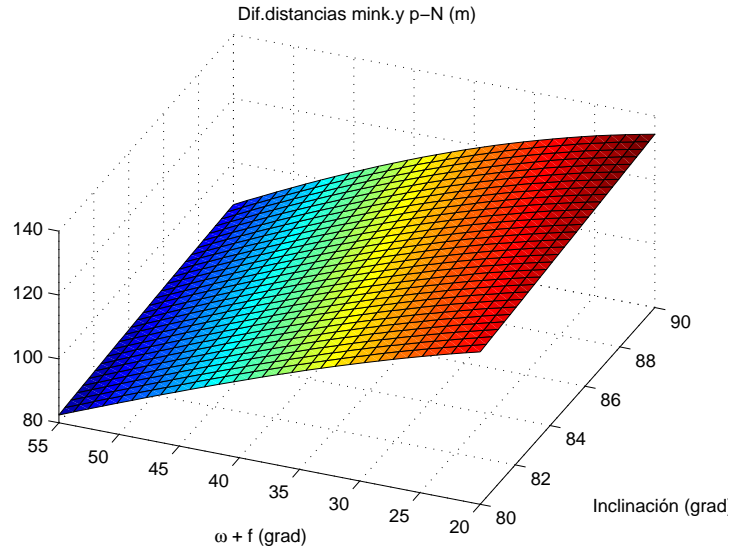


Figura 4.43

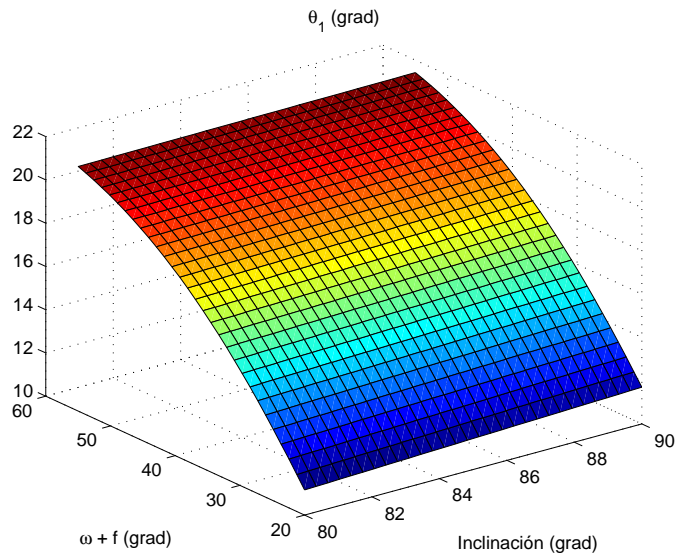


Figura 4.44

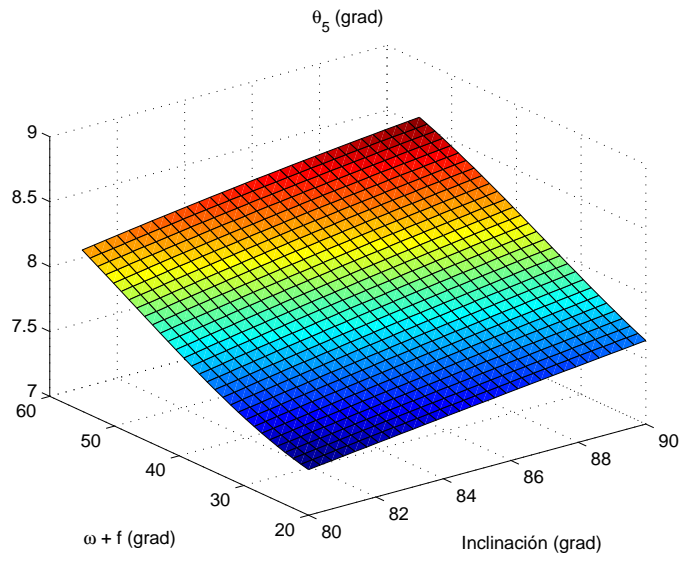


Figura 4.45

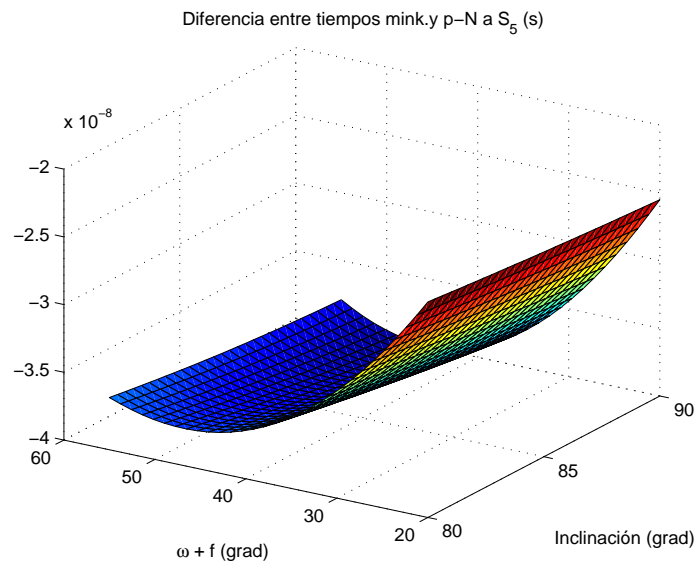


Figura 4.46

Las diferencias en las magnitudes que resultan de las medidas FDOA vuelven a valores pequeños: 10^{-4} km/s para las diferencias de velocidades, (figura 4.47), 10^{-3}

grados en los ángulos entre velocidades, (figura 4.48), y 10^{-2} MHz para las diferencias de frecuencias (figura 4.49).

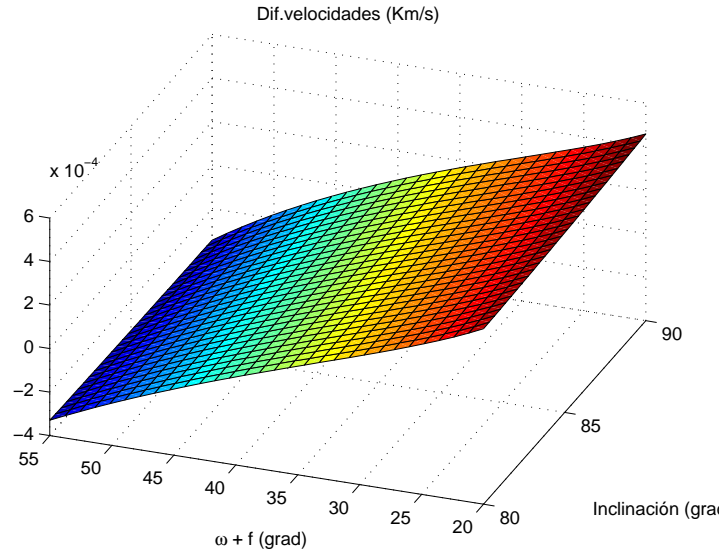


Figura 4.47

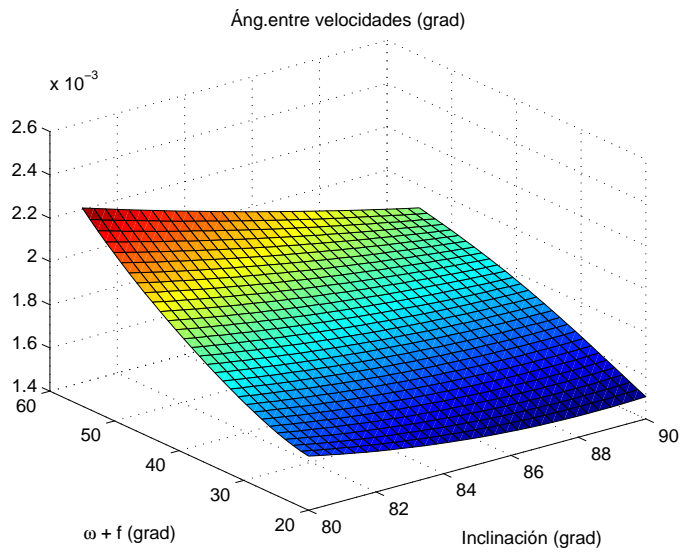


Figura 4.48

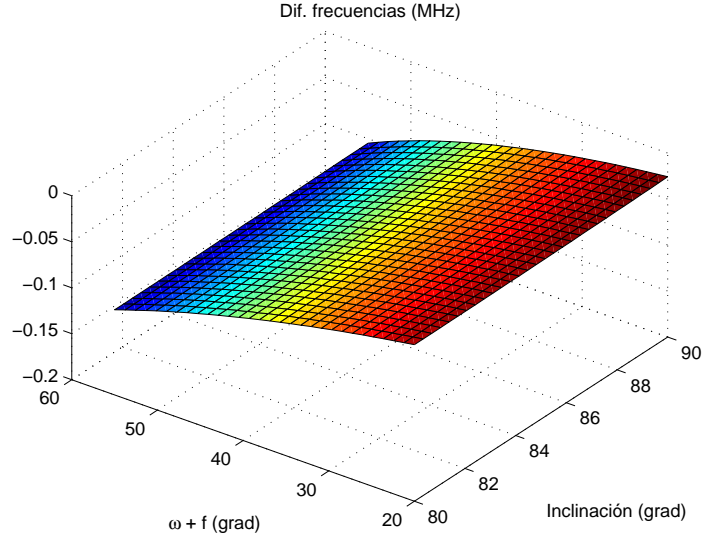


Figura 4.49

Comenzamos, seguidamente, una nueva serie de simulaciones, la *serie 2*, con constelaciones formadas por solo cinco satélites, los cuales realizan ambas operaciones, TDOA y FDOA. Al objeto de obtener unas diferencias apreciables entre las medidas minkowskianas y las posnewtonianas, tanto en las magnitudes relacionadas con TDOA como con FDOA se prueba, en la simulación *2.1*, una configuración formada por tres satélites GEO y dos LEO, con un abanico amplio de valores angulares, la cual se detalla a continuación:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.12^\circ$;	$r_1 = 0.067 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -99^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -57^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 57^\circ$;	$r_3 = 0.14002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 42^\circ$;	$i_4 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.12^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 70^\circ$;	$i_5 = 1.5^\circ$;	$(\omega + f)_5 = -20^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

El intervalo de exploración se reduce a $(-10^\circ, 10^\circ)$ para $(\omega + f)$ y $(0^\circ, 10^\circ)$ para la inclinación. Se encuentran las diferencias de distancias que se reflejan en la figura (4.50).

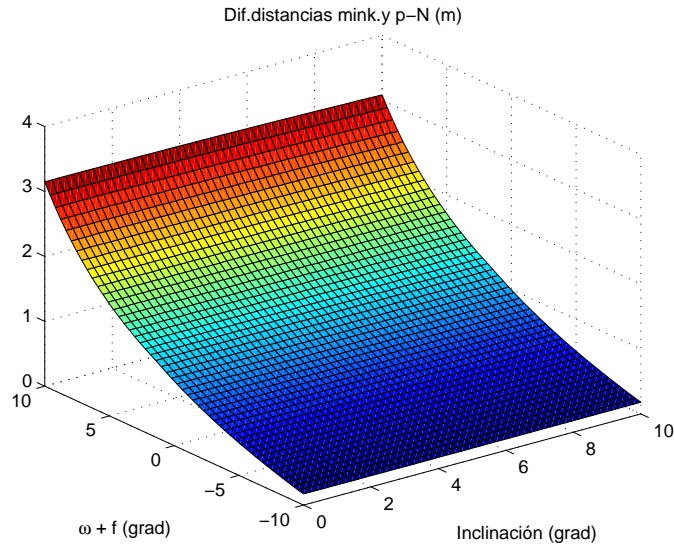


Figura 4.50

En esta ocasión se eligen los ángulos θ_3 y θ_5 , que se representan en las figuras 4.51 y 4.52, respectivamente.

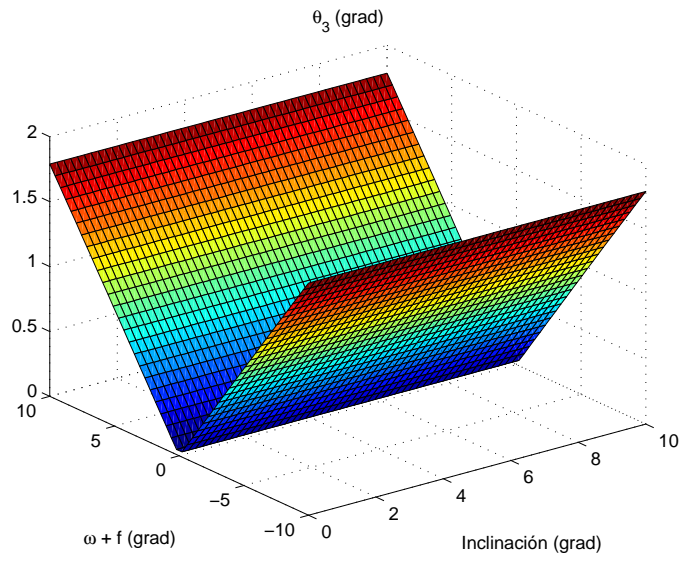


Figura 4.51

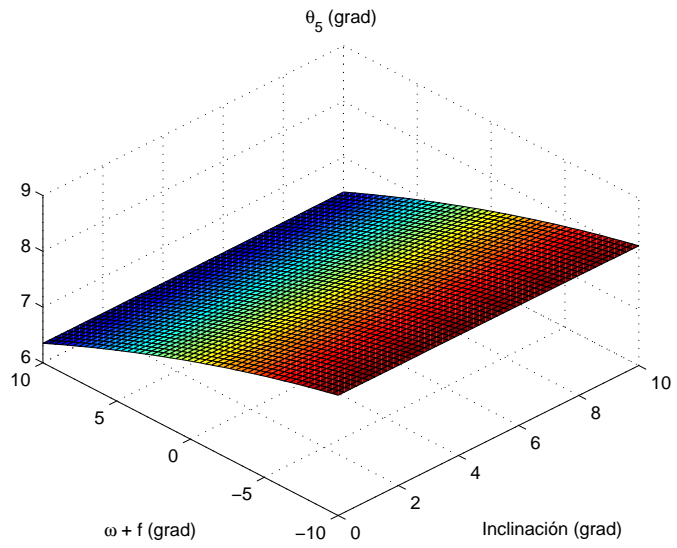


Figura 4.52

La figura 4.53 nos revela diferencias de tiempos de 10^{-10} s, considerablemente menores que las que se tenían en la *serie 1*.

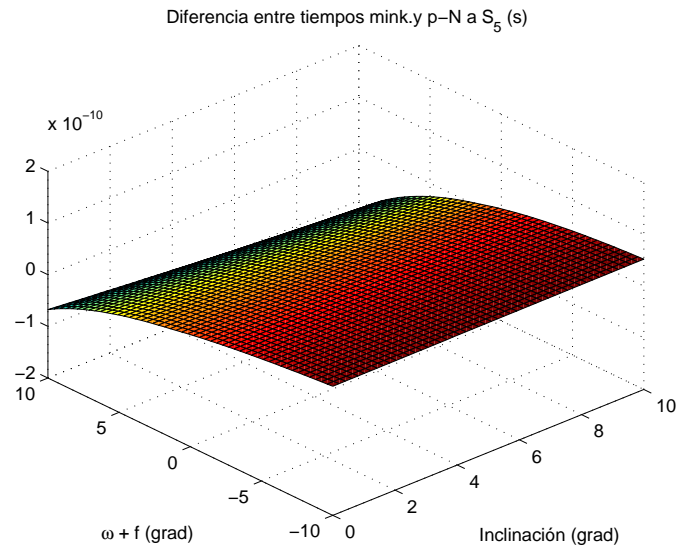


Figura 4.53

Se tienen valores equilibrados para las diferencias de velocidades, ángulos entre velocidades y diferencias de frecuencias, como puede verse en las figuras 4.54, 4.55 y 4.56, respectivamente.

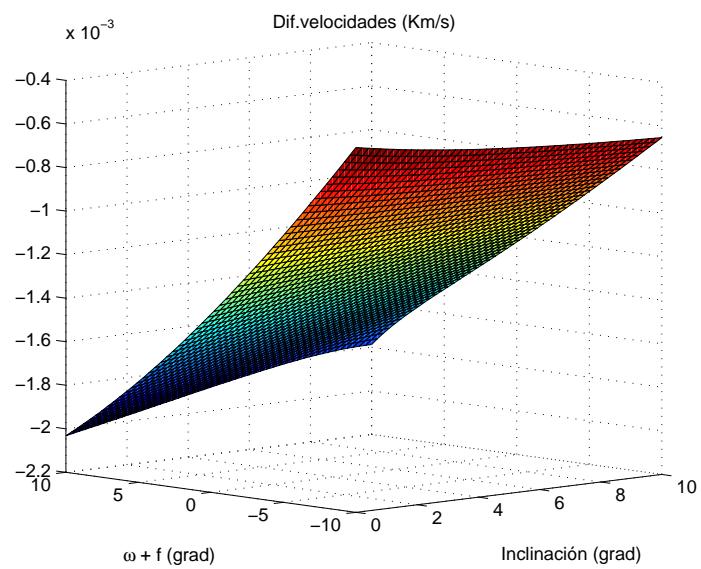


Figura 4.54

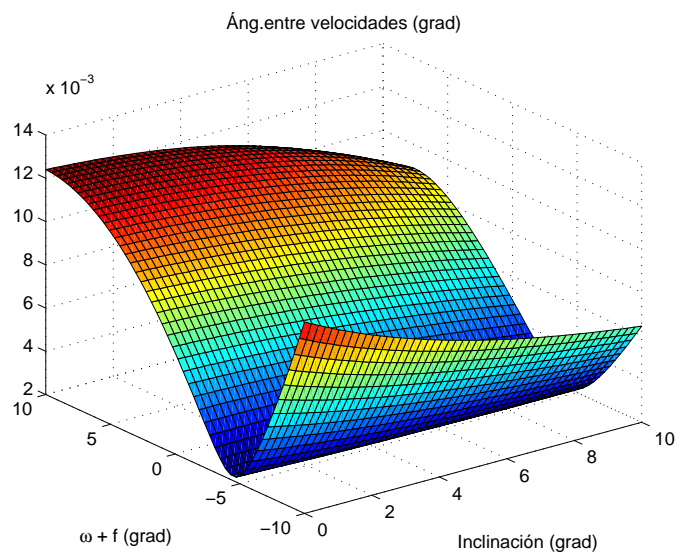


Figura 4.55

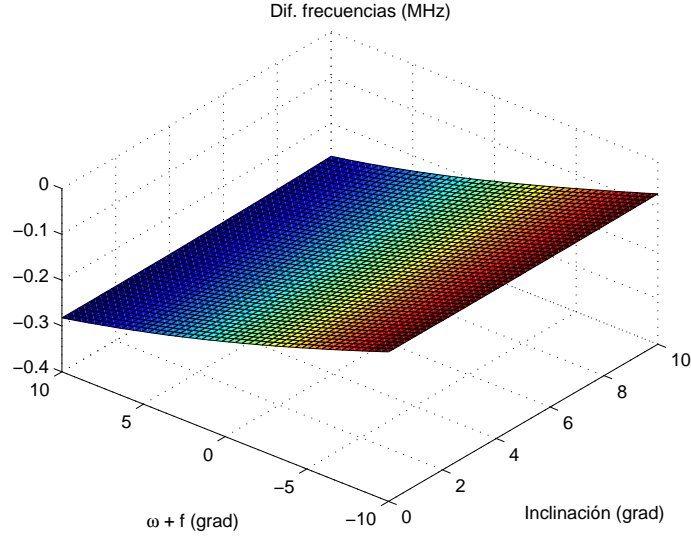


Figura 4.56

En la simulación 2.2 utilizamos un único satélite GEO y cuatro LEO, con uno de ellos más cercano a la superficie de la Tierra; el dominio de observación aumenta para $(\omega + f)$, cubriendo el intervalo $(-10^\circ, 50^\circ)$ y las inclinaciones se reducen a $(0^\circ, 1^\circ)$. Los datos de los satélites son:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.12^\circ$;	$r_1 = 0.067 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -99^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -57^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 50^\circ$;	$r_3 = 0.04002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 42^\circ$;	$i_4 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 70^\circ$;	$i_5 = 0.55^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 1^\circ$;	$r_5 = 0.067 \text{ s}$.

Resultan valores similares a los de la simulación 2.1, tanto en las magnitudes relacionadas con TDOA como en las relacionadas con FDOA, lo que se ve en las figuras (4.57) a (4.63).

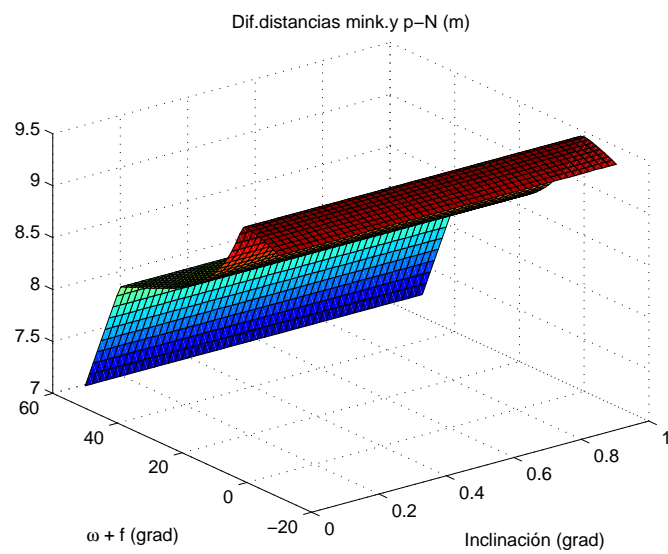


Figura 4.57

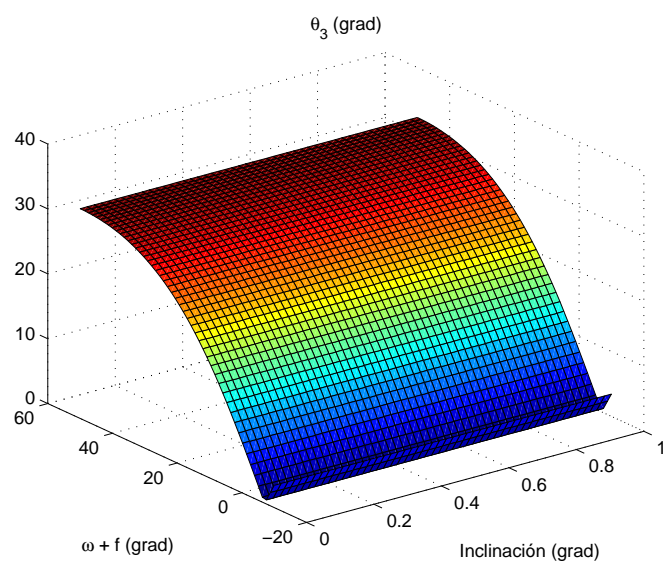


Figura 4.58

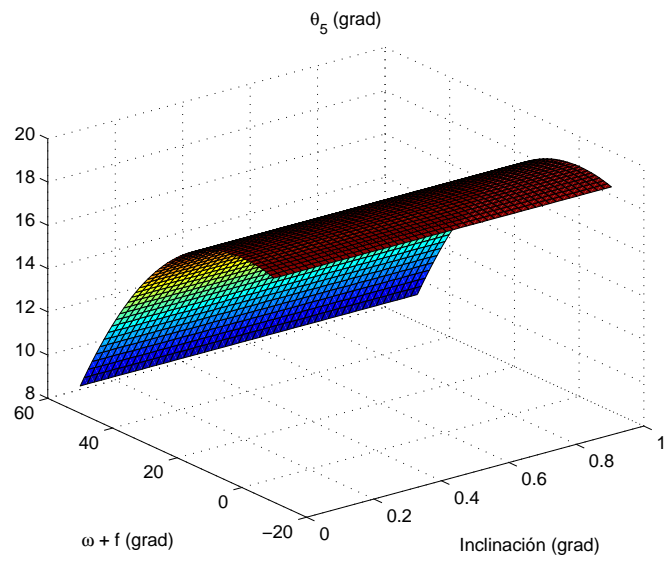


Figura 4.59

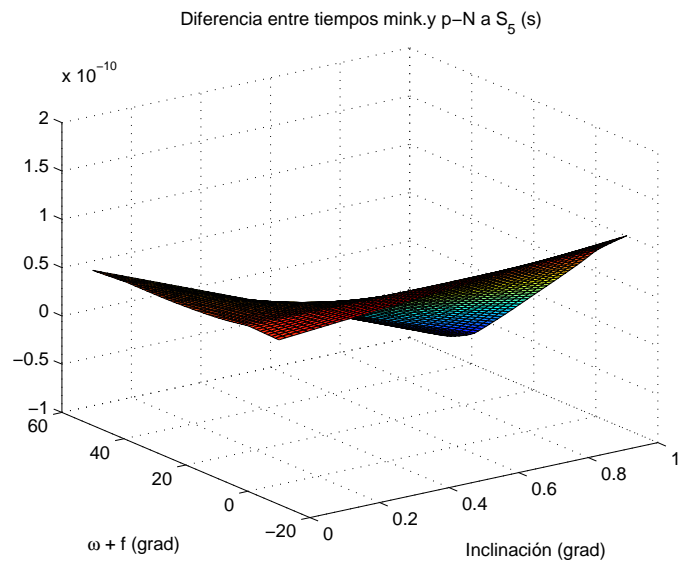


Figura 4.60

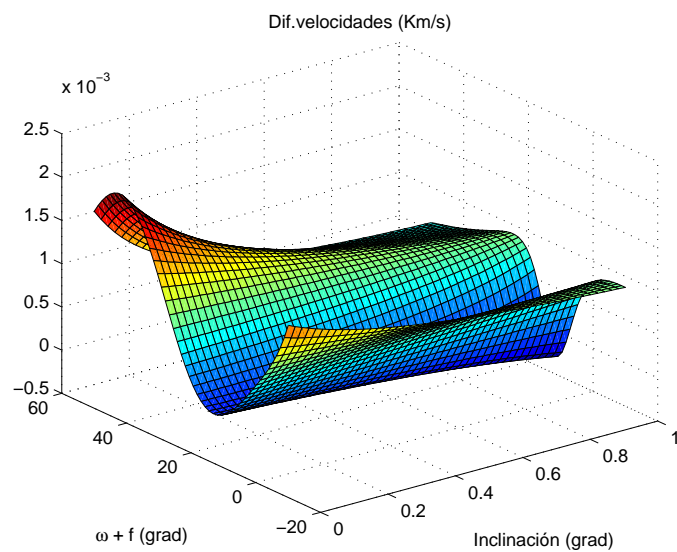


Figura 4.61

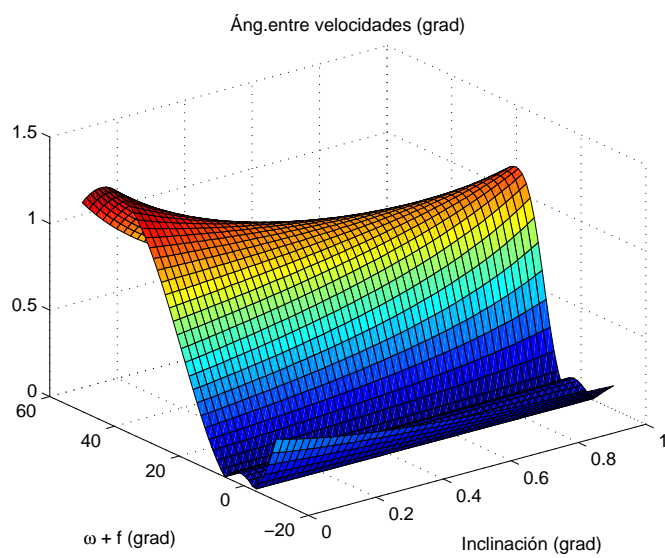


Figura 4.62

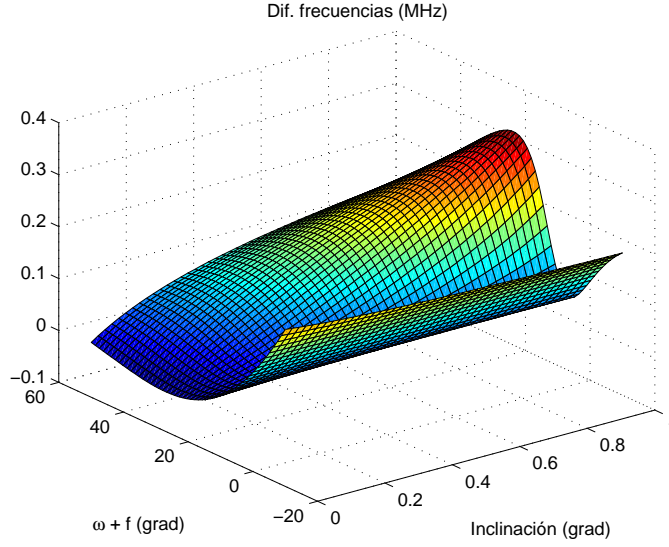


Figura 4.63

Para la simulación 2.3 se dispone un satélite MEO, un GEO y tres LEO, en un rango de observación muy similar al de la simulación anterior: $(0^\circ, 70^\circ)$ para $(\omega + f)$ y $(0^\circ, 0.2^\circ)$ para las inclinaciones de los radiotransmisores. Los elementos orbitales de los satélites son:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.12^\circ$;	$r_1 = 0.097 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -99^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -57^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 40^\circ$;	$r_3 = 0.04002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 42^\circ$;	$i_4 = 10^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 30^\circ$;	$i_5 = 10^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0.1^\circ$;	$r_5 = 0.077 \text{ s}$.

Las diferencias de distancias mejoran en un orden de magnitud con respecto a las obtenidas en la simulación 2.2 (figura 4.64). Las diferencias entre tiempos min-kowskianos y posnewtonianos de llegada de la señal a S_5 decrecen a 10^{-11} s (figura 4.67).

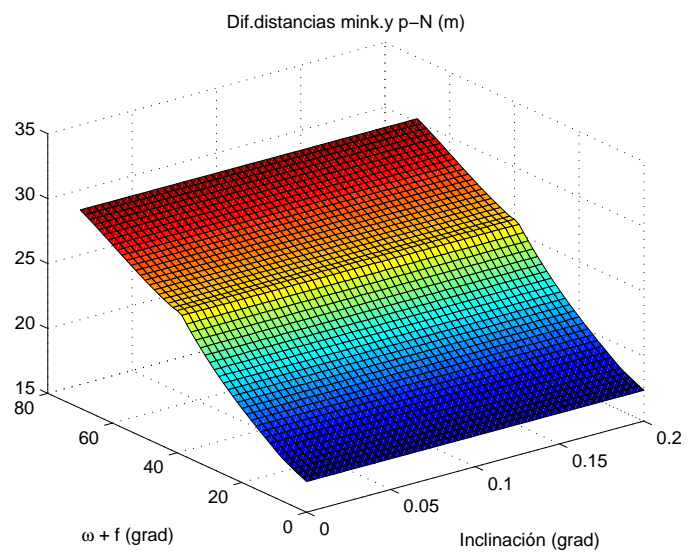


Figura 4.64

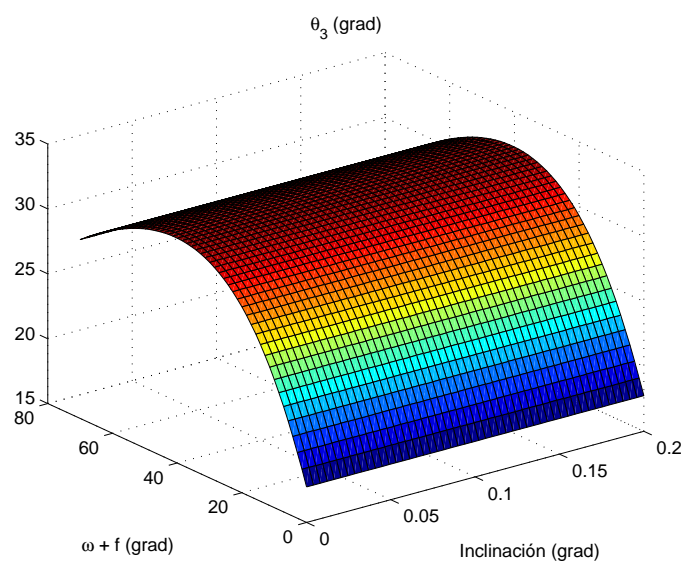


Figura 4.65

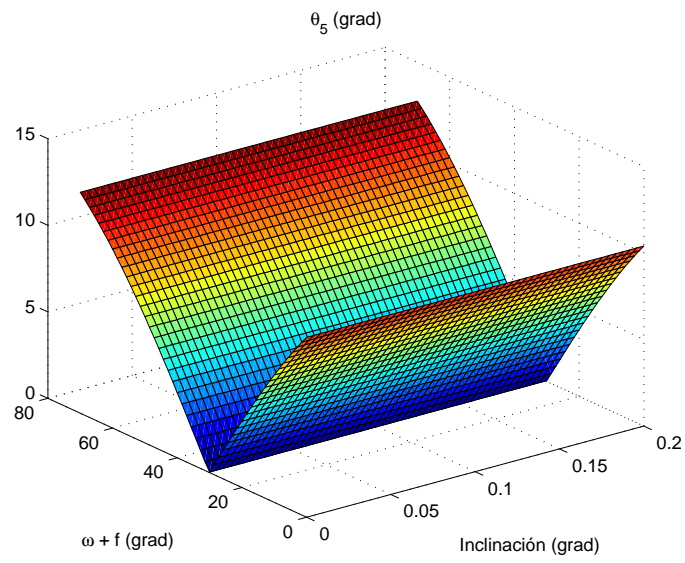


Figura 4.66

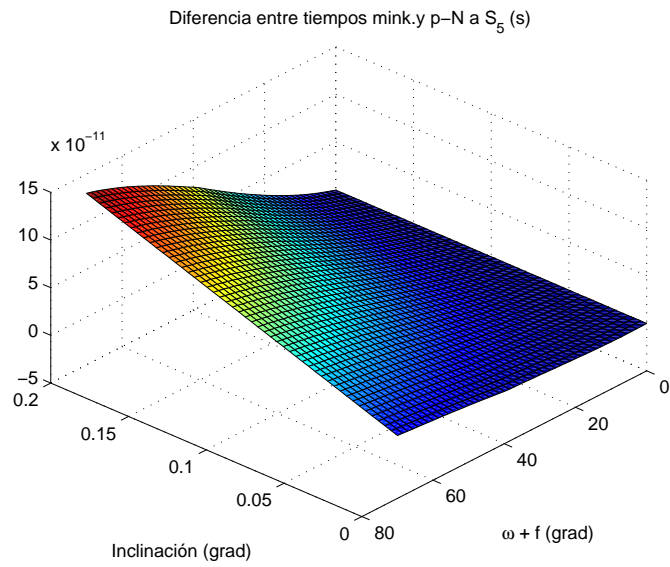


Figura 4.67

Por lo que respecta a las magnitudes que resultan de las medidas FDOA, las di-

ferencias de velocidades también aumentan en un orden de magnitud respecto de las vistas en la simulación anterior (figura 4.68); los ángulos entre velocidades y las diferencias de frecuencias se mantienen (figuras 4.69 y 4.70, respectivamente).

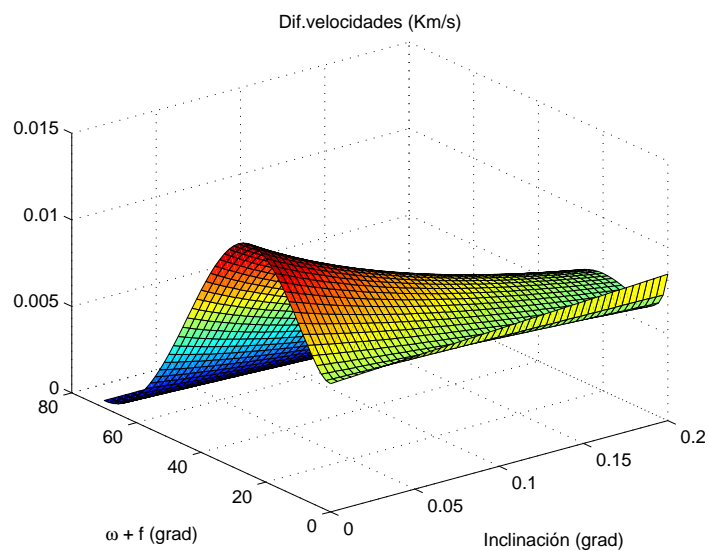


Figura 4.68

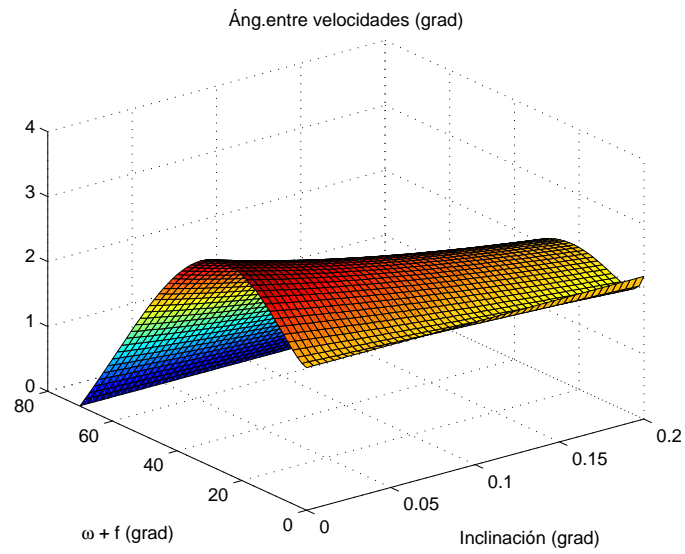


Figura 4.69

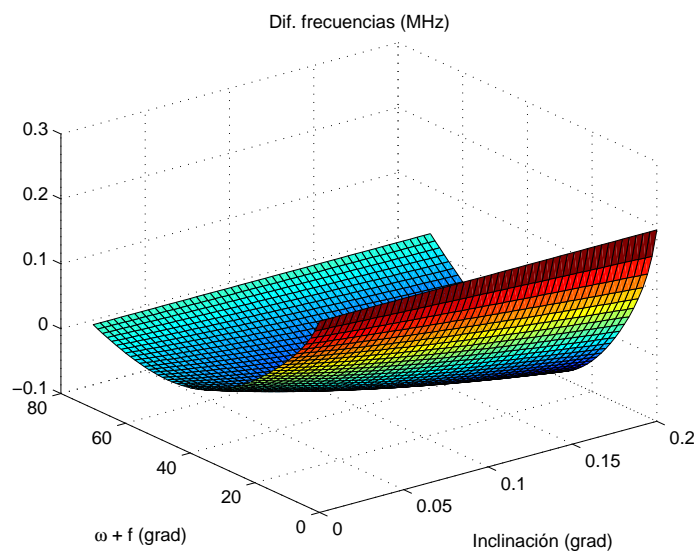


Figura 4.70

En la simulación que sigue, la 2.4, el intervalo para $(\omega + f)$ es $(-60^\circ, 40^\circ)$ y las

inclinaciones de los radiotransmisores se fijan en $(-0.1^\circ, 0^\circ)$. Se sitúan tres satélites GEO y dos LEO, con nodos ascendentes que se encuentran dentro de un amplio arco de valores, entre -99° y 70° , y con inclinaciones cercanas a cero en tres de ellos. El conjunto de los datos orbitales es:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.12^\circ$;	$r_1 = 0.067 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -99^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -57^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 57^\circ$;	$r_3 = 0.14003 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 42^\circ$;	$i_4 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.12^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 70^\circ$;	$i_5 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0.12^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

Las diferencias de distancias alcanzan valores más altos respecto de las de la simulación 2.3 (figura 4.71). Las diferencias de tiempos de llegada de la señal a S_5 siguen en valores de 10^{-11} s (figura 4.74).

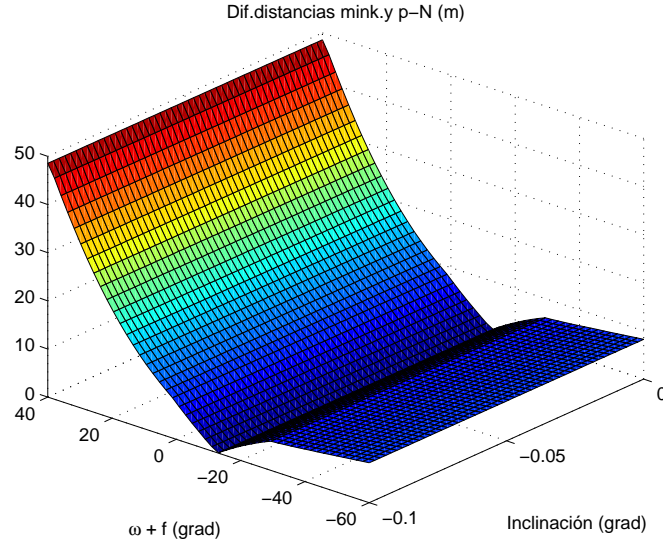


Figura 4.71

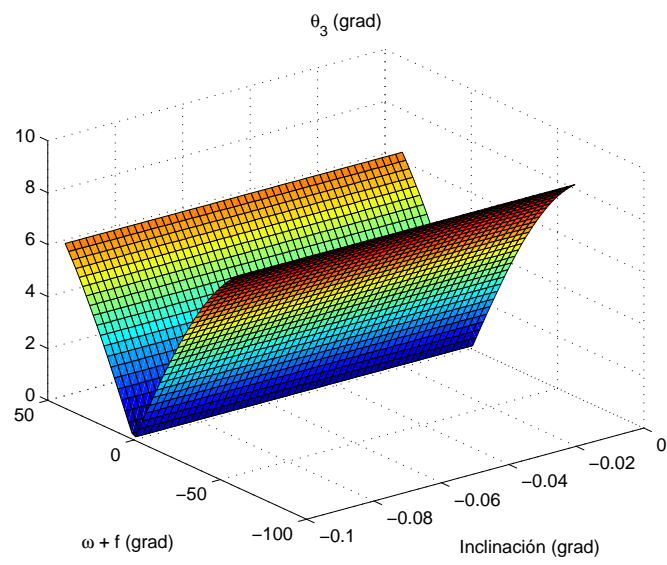


Figura 4.72

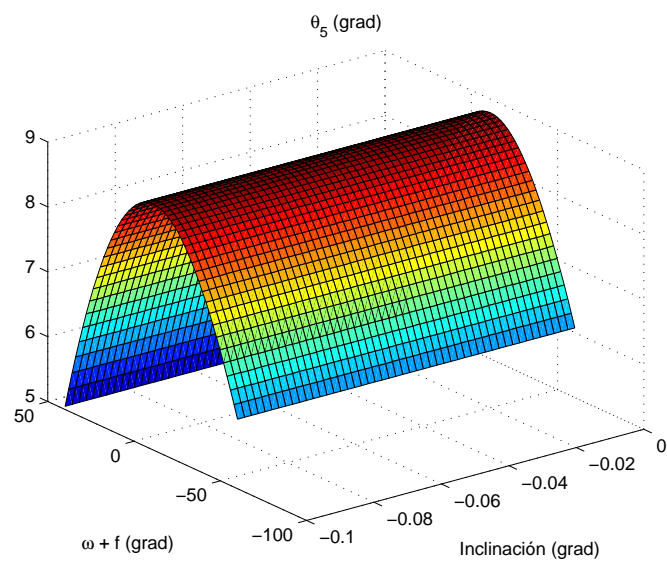


Figura 4.73

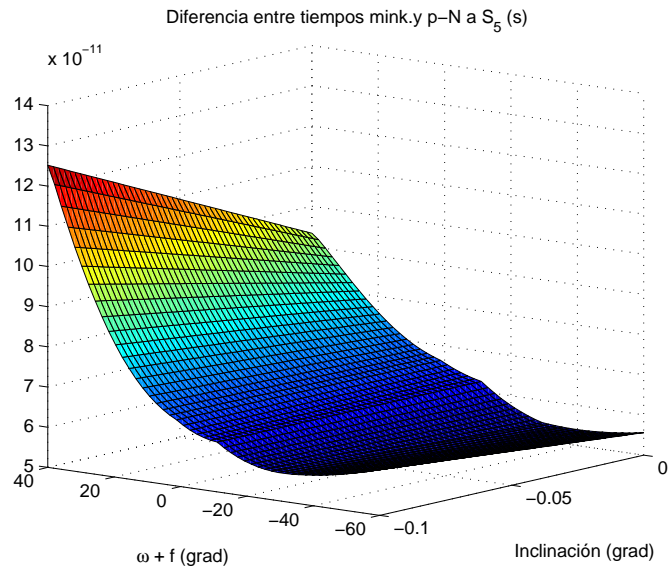


Figura 4.74

No hay cambios significativos en los rangos que alcanzan las tres diferencias de magnitudes que se obtienen de FDOA (figuras 4.75 a 4.77).

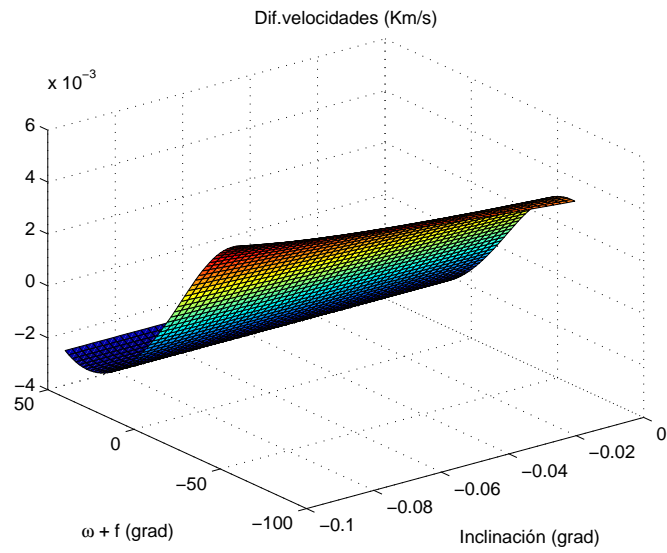


Figura 4.75

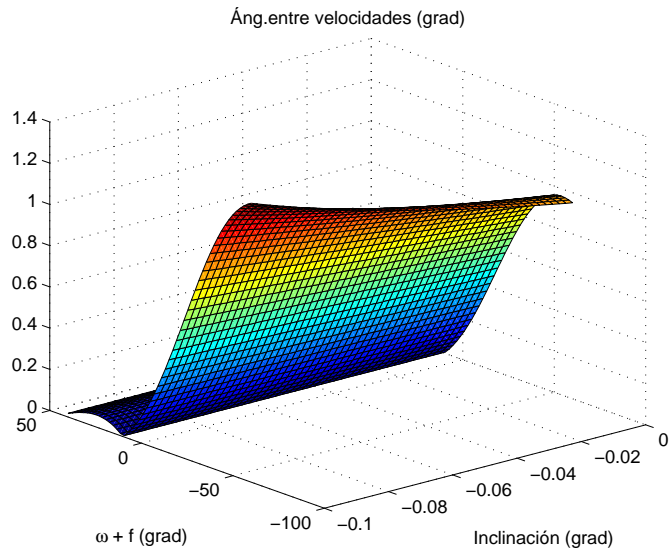


Figura 4.76

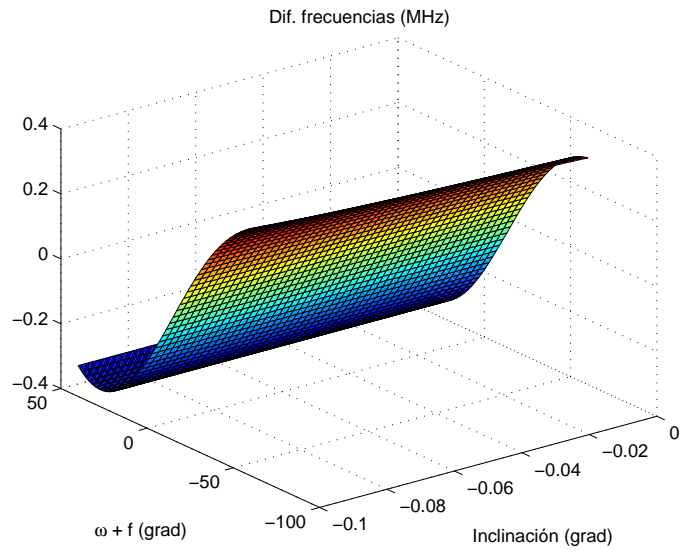


Figura 4.77

Si se hacen variar levemente los parámetros angulares de S_5 , no se puede mantener

el intervalo de observación para $(\omega + f)$ y hay que reducirlo a $(-10^\circ, 0^\circ)$. Las inclinaciones se encuentran ahora en el rango $(-1^\circ, 1^\circ)$. Esta es la simulación 2.5. Debido a ello, no se esperan grandes cambios en las diferencias de distancias y se exploran las diferencias en velocidades y frecuencias. Los cinco satélites forman la siguiente constelación:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.12^\circ$;	$r_1 = 0.067 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -99^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -57^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 57^\circ$;	$r_3 = 0.14002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 42^\circ$;	$i_4 = 55^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.12^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 80^\circ$;	$i_5 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_5 = -10^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

En efecto, las figuras (4.78) a (4.81) muestran que no hay grandes variaciones en las magnitudes que dependen de la TDOA. Sin embargo, las que dependen de la FDOA disminuyen ligeramente respecto de las observadas en la simulación 2.4, como se ve en las figuras (4.82) a (4.84).

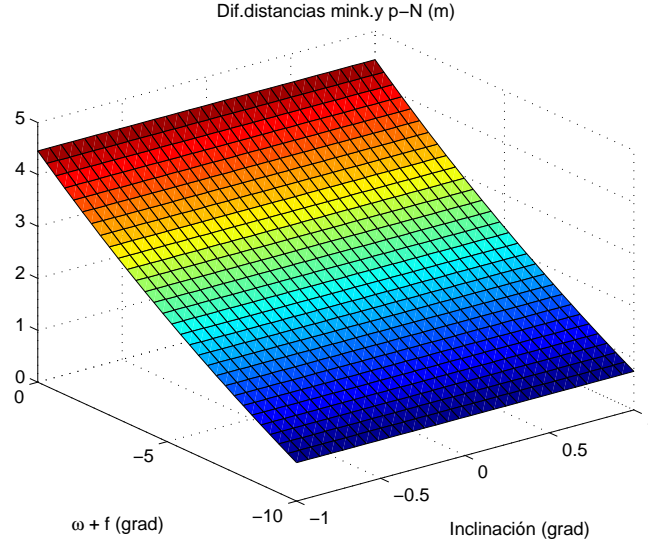


Figura 4.78

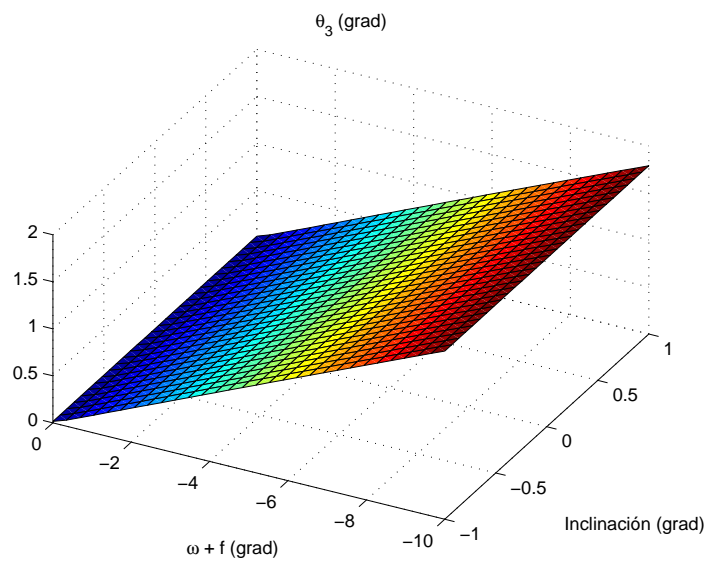


Figura 4.79

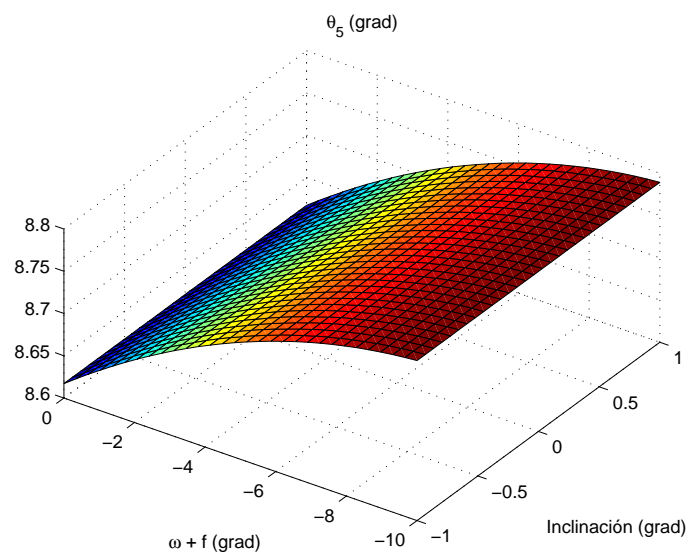


Figura 4.80

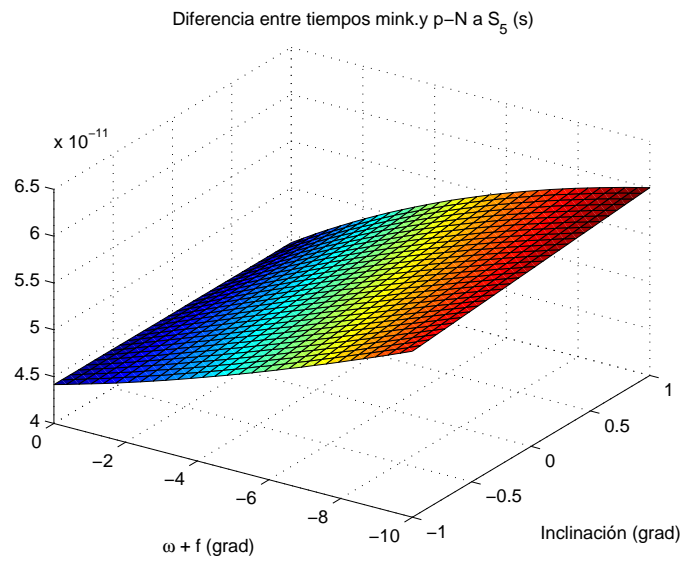


Figura 4.81

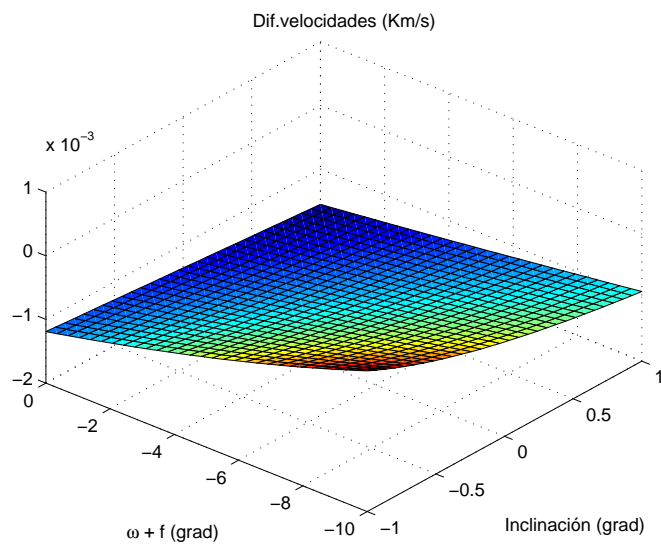


Figura 4.82

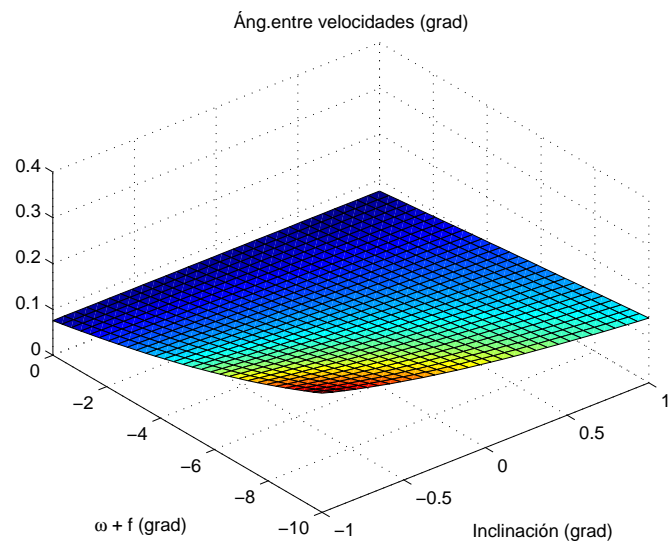


Figura 4.83

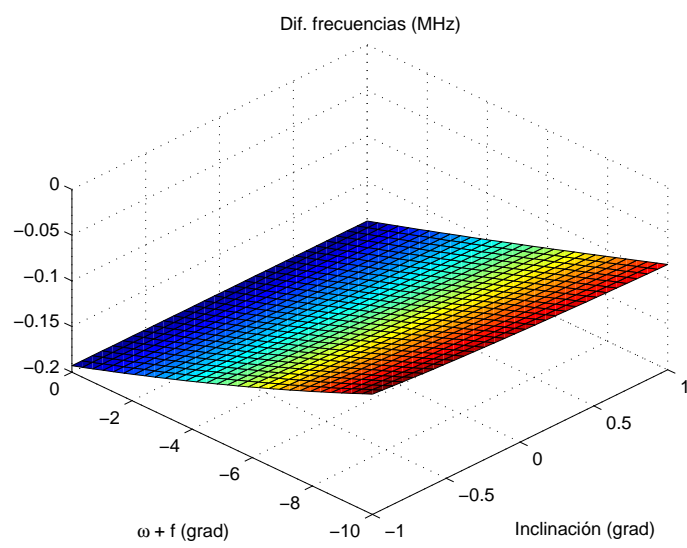


Figura 4.84

Se prueba, entonces, una nueva configuración de satélites con anomalías verdaderas

junto con perigeos cercanos a cero. Las inclinaciones se hacen tender también a cero y las posiciones de tres de los satélites varían respecto de la simulación anterior. Son cuatro satélites LEO y un GEO dispuestos como sigue:

S_1 :	$\Omega_1 = -70^\circ$;	$i_1 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.1^\circ$;	$r_1 = 0.027 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -20^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.067 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 5^\circ$;	$r_3 = 0.14002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 40^\circ$;	$i_4 = 1^\circ$;	$(\omega + f)_4 = -0.1^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 70^\circ$;	$i_5 = 1.5^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 10^\circ$;	$r_5 = 0.067 \text{ s}$.

Identificamos a esta simulación como la 2.6. Se puede ensanchar el dominio de observación al intervalo $(-50^\circ, 50^\circ)$ para $(\omega + f)$; las inclinaciones se reducen a $(-0.1^\circ, 0.1^\circ)$.

Se observan valores semejantes en las diferencias de distancias y en los ángulos θ_3 y θ_5 (figuras 4.85 a 4.87). Las diferencias de tiempos de llegada a S_5 se mantienen en 10^{-11} s (fig. 4.88).

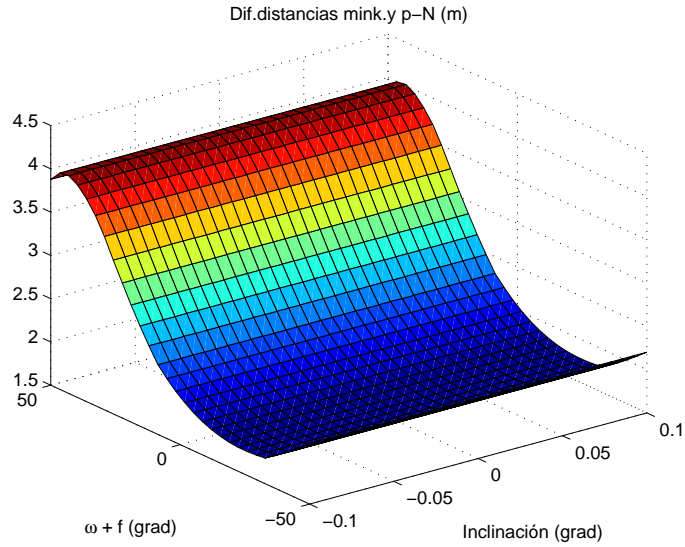


Figura 4.85

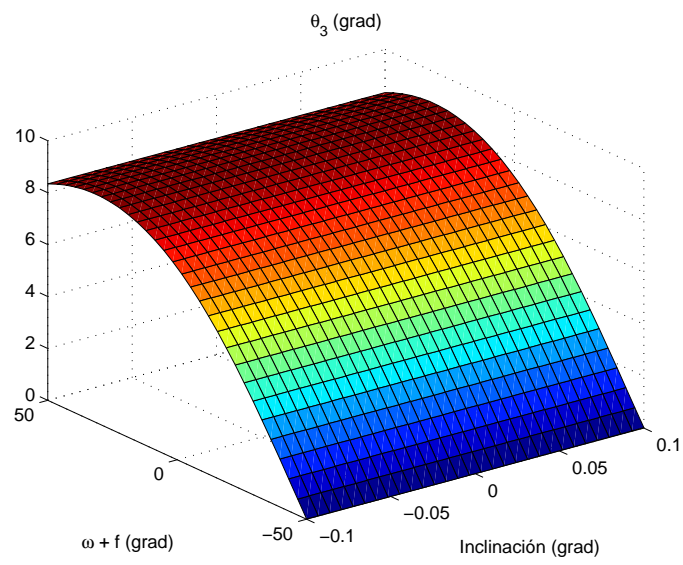


Figura 4.86

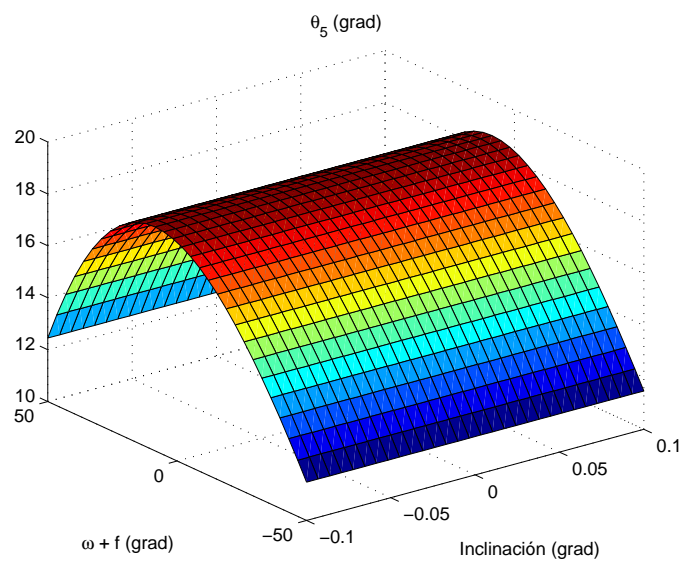


Figura 4.87

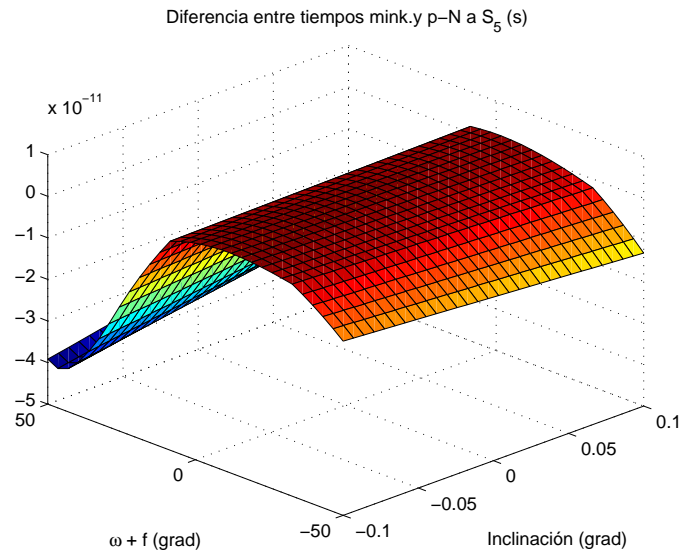


Figura 4.88

Las diferencias de velocidades disminuyen en un orden de magnitud (figura 4.89) y los ángulos entre velocidades y las diferencias de frecuencias no varían (figuras 4.90 y 4.91, respectivamente).

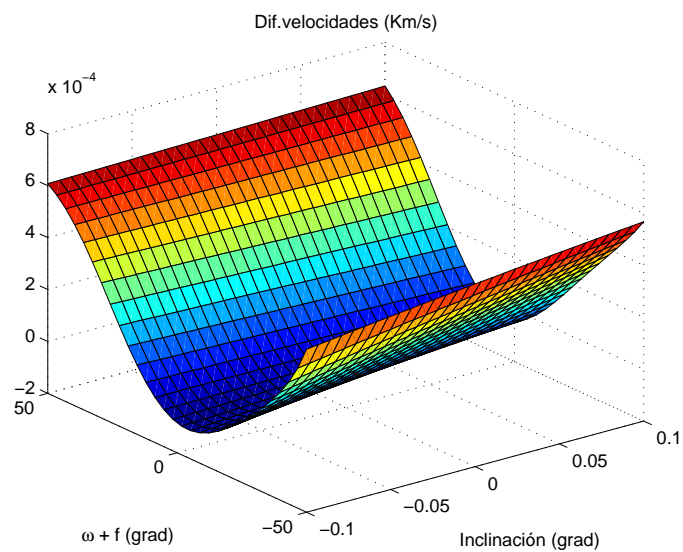


Figura 4.89

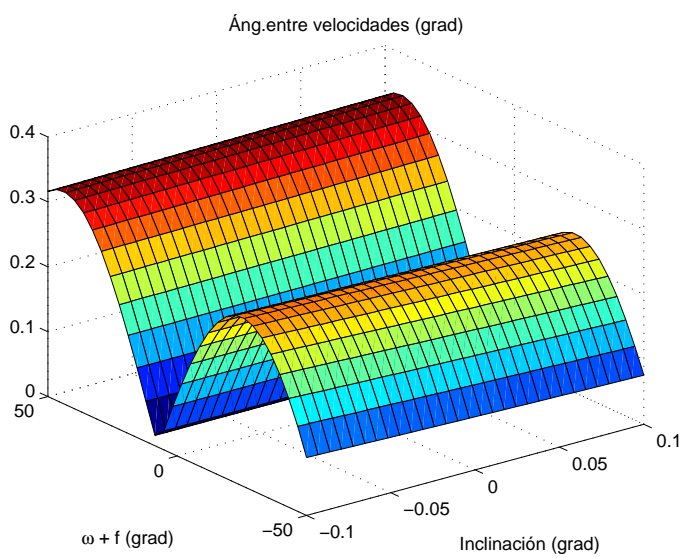


Figura 4.90

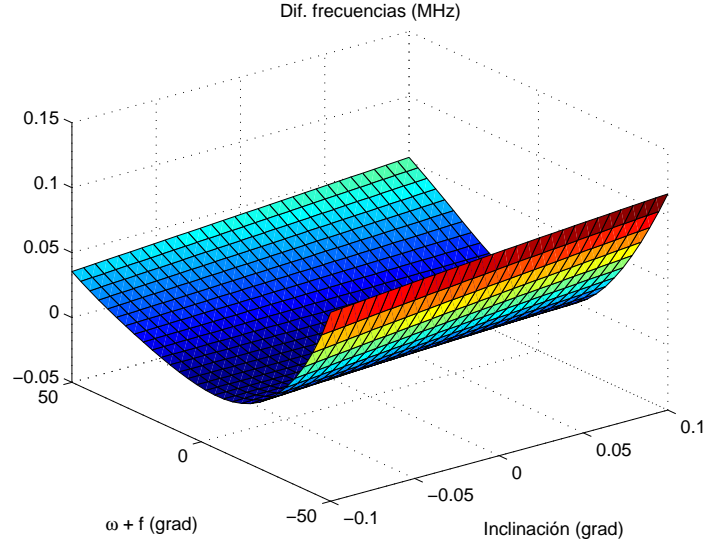


Figura 4.91

En una nueva simulación, la 2.7, ensanchamos el dominio de observación para $(\omega + f)$ al intervalo $(-60^\circ, 60^\circ)$; el intervalo de las inclinaciones apenas varía: $(0^\circ, 0.1^\circ)$. Se utilizan dos satélites GEO, dos LEO y un MEO formando la siguiente constelación:

S_1 :	$\Omega_1 = 0^\circ$;	$i_1 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 1.9^\circ$;	$r_1 = 0.047 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -20^\circ$;	$i_2 = 0.1^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 57^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -55^\circ$;	$i_3 = 0.4^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 10^\circ$;	$r_3 = 0.09002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 36.8^\circ$;	$i_4 = 1^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0.12^\circ$;	$r_4 = 0.067 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = -60^\circ$;	$i_5 = 1.5^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

Las diferencias de distancias tienen valores de unos pocos metros (figura 4.92). Las diferencias de tiempos de llegada de la señal al satélite S_5 están ahora en valores de 10^{-10} s , como se ve en la figura (4.95).

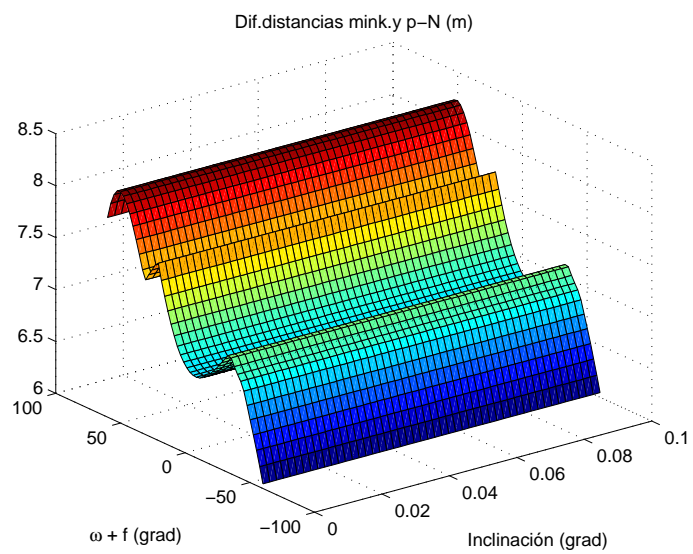


Figura 4.92

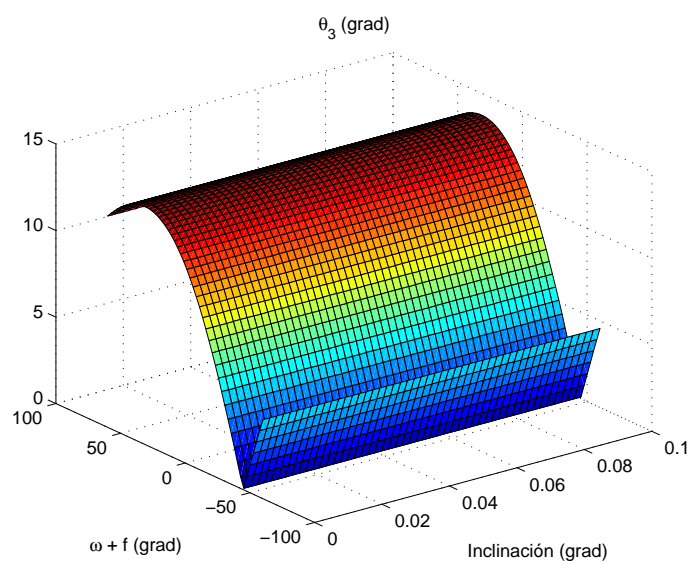


Figura 4.93

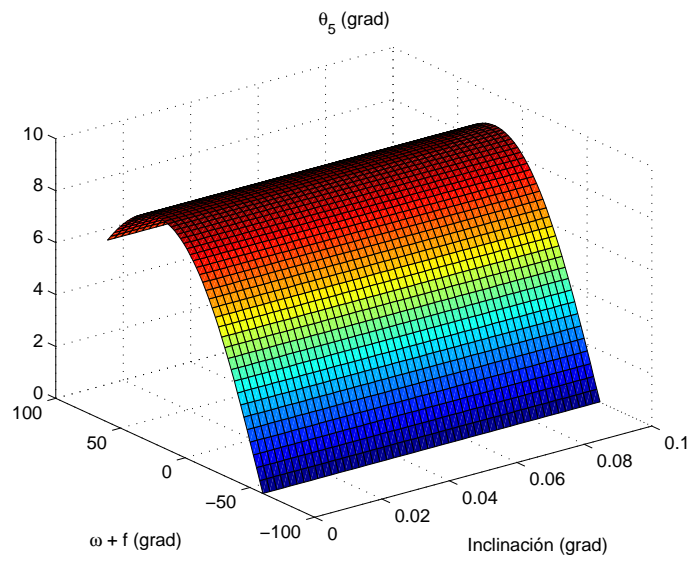


Figura 4.94

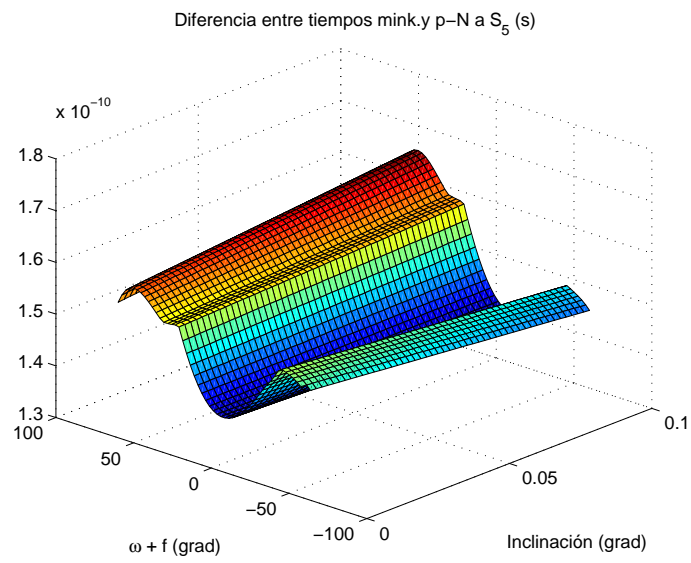


Figura 4.95

Las diferencias en las tres magnitudes FDOA presentan mínimos definidos a lo largo

del intervalo de observación, como indican las figuras (4.96), (4.97) y (4.98).

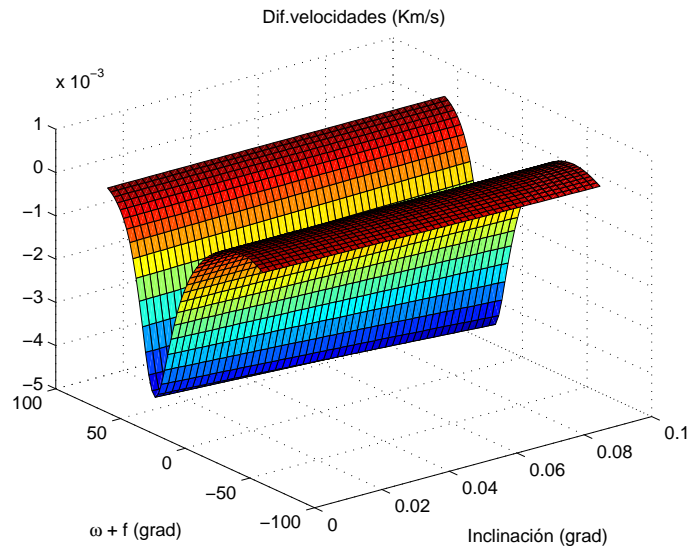


Figura 4.96

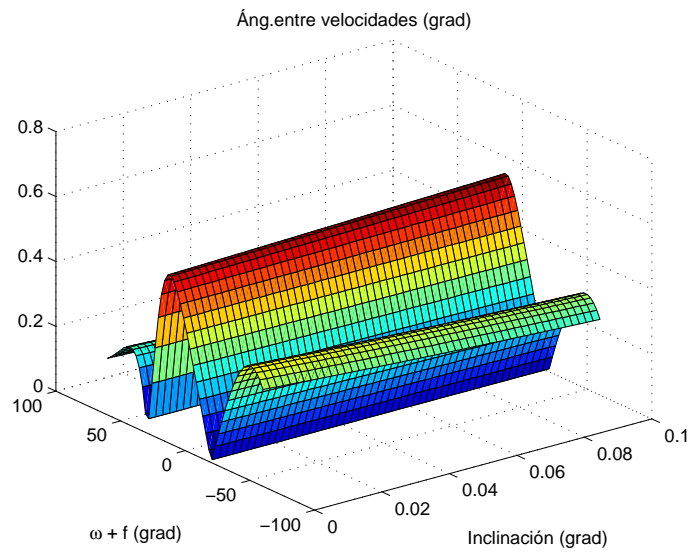


Figura 4.97

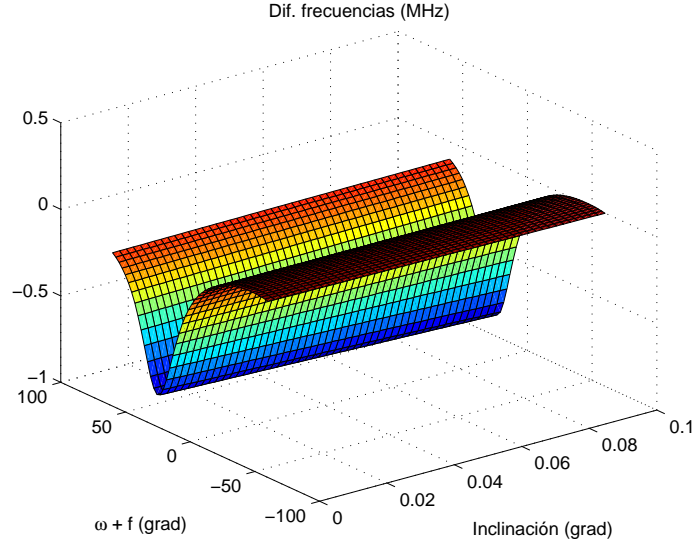


Figura 4.98

La simulación que sigue, 2.8, introduce muy poca variación en los elementos de los satélites y amplía el dominio de observación a $(-70^\circ, 70^\circ)$ en $(\omega + f)$ y a $(-0.1^\circ, 0.1^\circ)$ en las inclinaciones de los radiotransmisores. Los datos son:

$$S_1: \quad \Omega_1 = 36.8^\circ; \quad i_1 = 1^\circ; \quad (\omega + f)_1 = 0.22^\circ; \quad r_1 = 0.067 \text{ s}$$

$$S_2: \quad \Omega_2 = -60^\circ; \quad i_2 = 1.2^\circ; \quad (\omega + f)_2 = 0^\circ; \quad r_2 = 0.14002 \text{ s}$$

$$S_3: \quad \Omega_3 = -20^\circ; \quad i_3 = 0.1^\circ; \quad (\omega + f)_3 = 57^\circ; \quad r_3 = 0.14003 \text{ s}$$

$$S_4: \quad \Omega_4 = 0^\circ; \quad i_4 = 0.1^\circ; \quad (\omega + f)_4 = 1.9^\circ; \quad r_4 = 0.047 \text{ s}$$

$$S_5: \quad \Omega_5 = -55^\circ; \quad i_5 = 0.4^\circ; \quad (\omega + f)_5 = 10^\circ; \quad r_5 = 0.09002 \text{ s}.$$

Los resultados que se obtienen tanto en TDOA como en FDOA siguen patrones muy similares a los de la simulación 2.7, con valores y cotas del mismo orden, lo cual era esperable, pues como se indica más arriba las diferencias entre una configuración y otra son mínimas. Las figuras (4.99) a (4.105) corresponden a esta simulación 2.8.

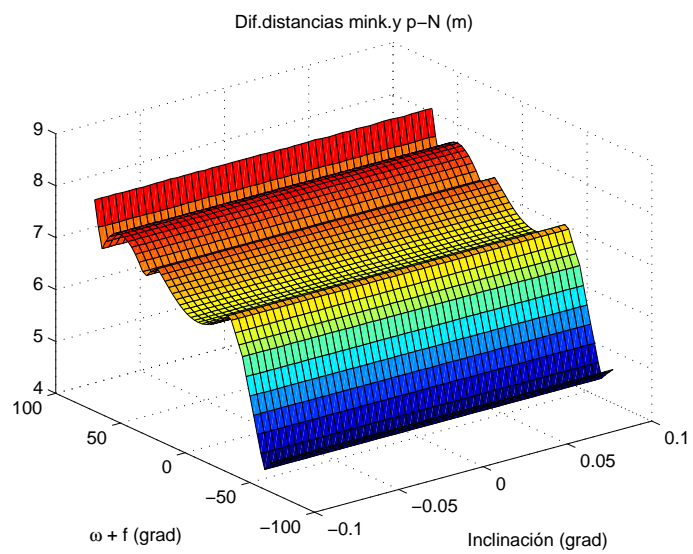


Figura 4.99

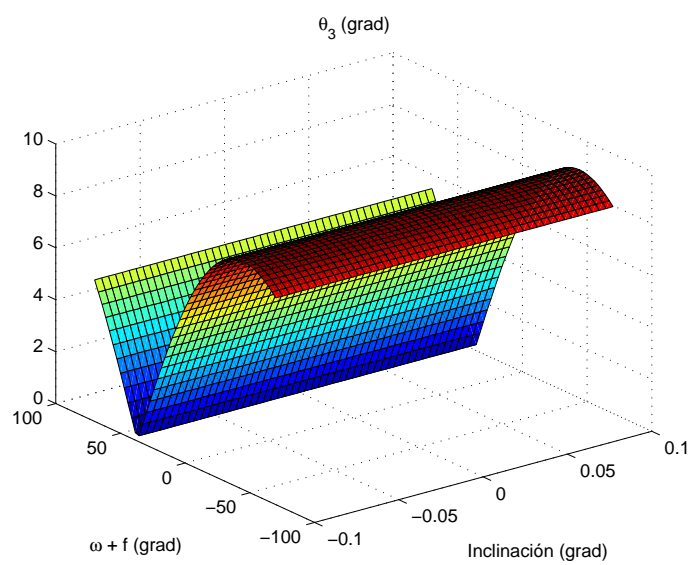


Figura 4.100

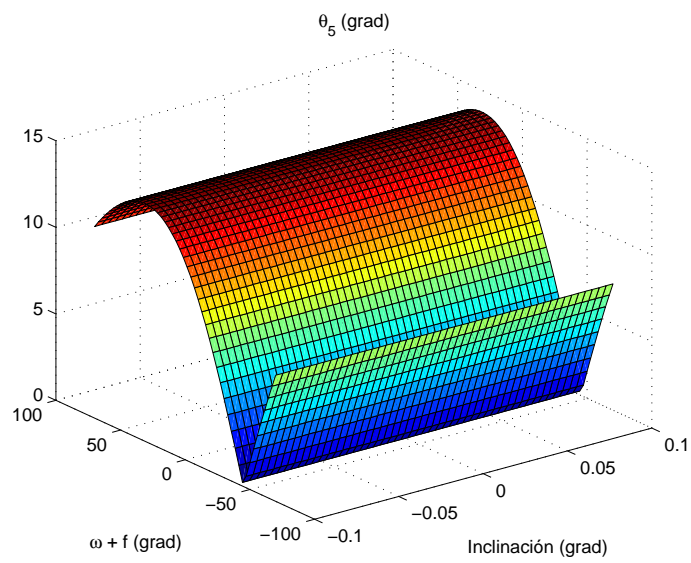


Figura 4.101

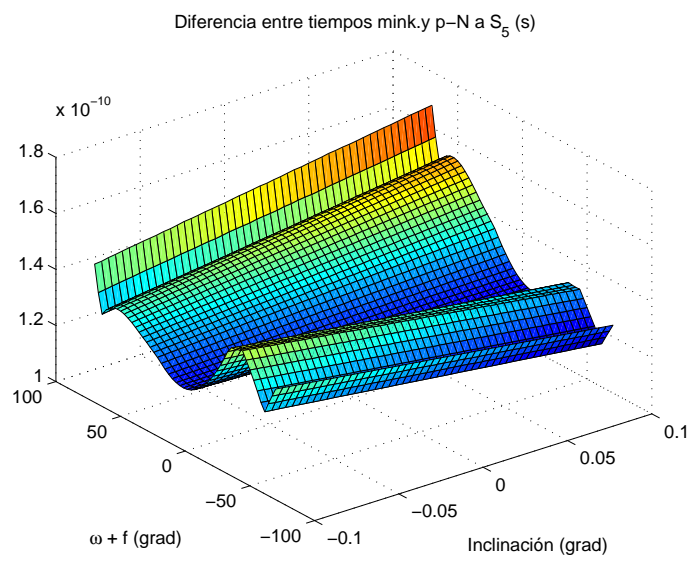


Figura 4.102

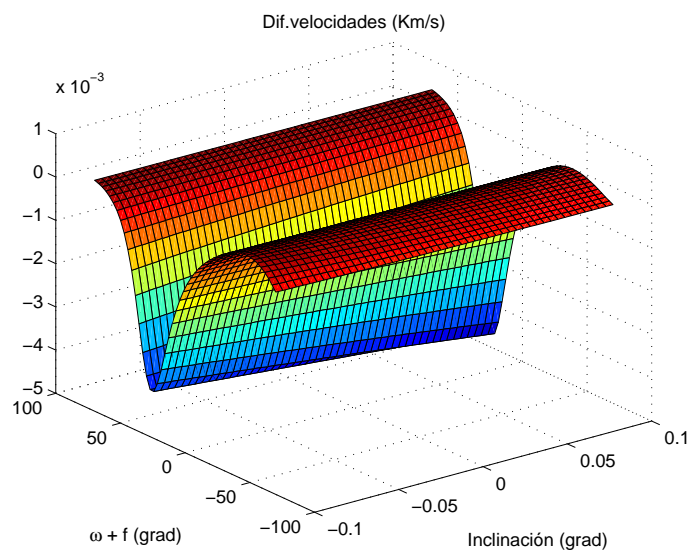


Figura 4.103

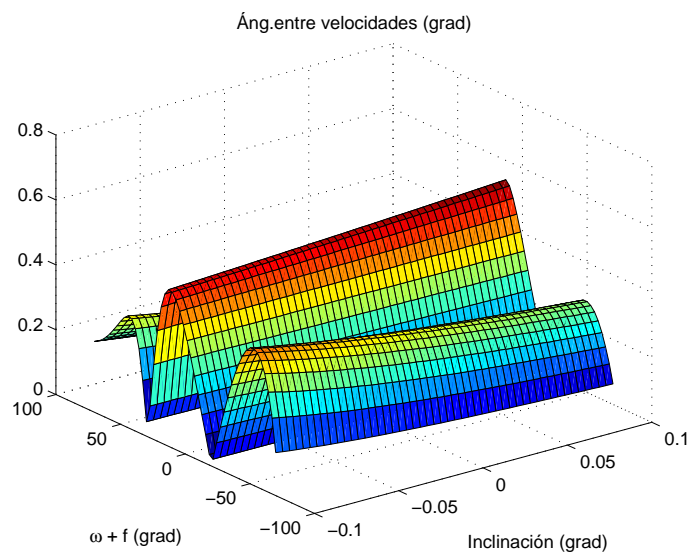


Figura 4.104

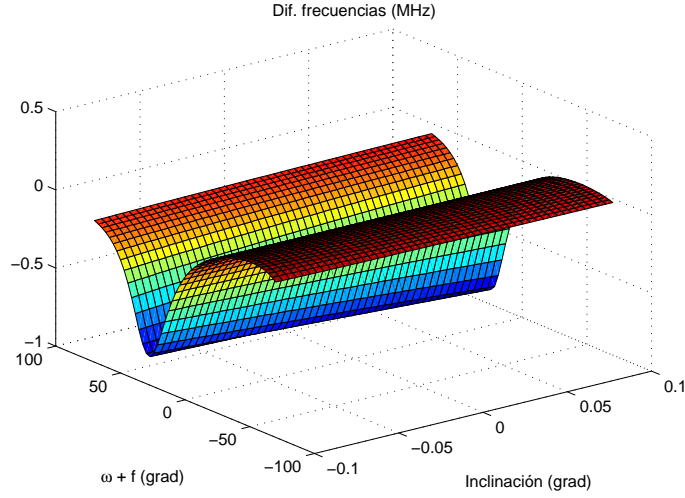


Figura 4.105

Como logro importante, se constata que se puede cubrir todo el espectro de observación con solamente cinco satélites, es decir, no siempre hay que reducir este para obtener resultados válidos, a la vez, en las magnitudes que proceden de TDOA y de FDOA. Esto sucede en la simulación 2.9, con la que finaliza la *serie 2*. El intervalo es $(-80^\circ, 80^\circ)$ para $(\omega + f)$ y para las inclinaciones de los radiotransmisores. Los satélites son un LEO, un GEO y tres MEO con las características orbitales siguientes:

S_1 :	$\Omega_1 = 70^\circ$;	$i_1 = 0.5^\circ$;	$(\omega + f)_1 = 0.5^\circ$;	$r_1 = 0.027002 \text{ s}$
S_2 :	$\Omega_2 = -20^\circ$;	$i_2 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_2 = 0^\circ$;	$r_2 = 0.14002 \text{ s}$
S_3 :	$\Omega_3 = -65^\circ$;	$i_3 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_3 = 0^\circ$;	$r_3 = 0.10002 \text{ s}$
S_4 :	$\Omega_4 = 76.8^\circ$;	$i_4 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_4 = 0^\circ$;	$r_4 = 0.14002 \text{ s}$
S_5 :	$\Omega_5 = 55^\circ$;	$i_5 = 0^\circ$;	$(\omega + f)_5 = 0^\circ$;	$r_5 = 0.14002 \text{ s}$.

Las distancias grandes entre satélites permiten encontrar diferencias de distancias de unas pocas décimas de metro (figura 4.106). Las diferencias de tiempos de llegada

de la señal a S_5 se consolidan, de nuevo, en valores de 10^{-10} s, obtenidos en las primeras simulaciones de esta serie de cinco satélites (figura 4.109).

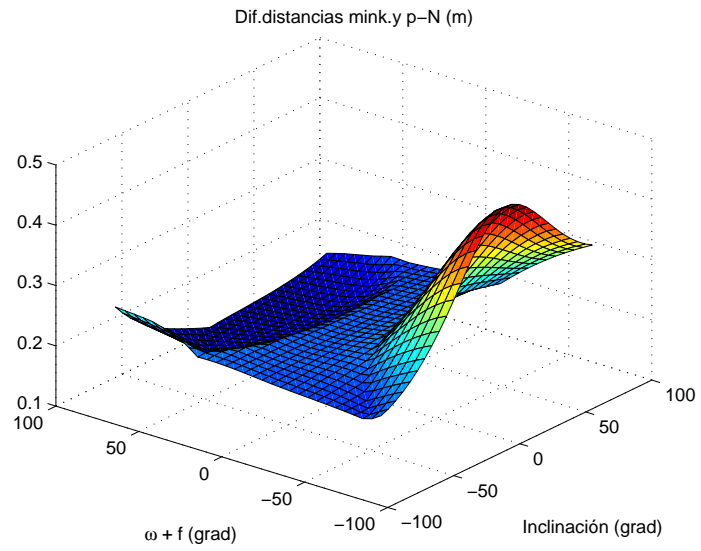


Figura 4.106

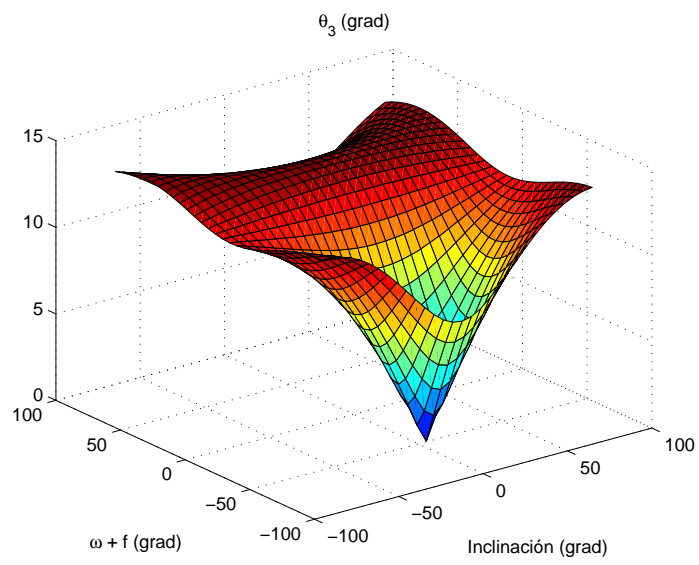


Figura 4.107

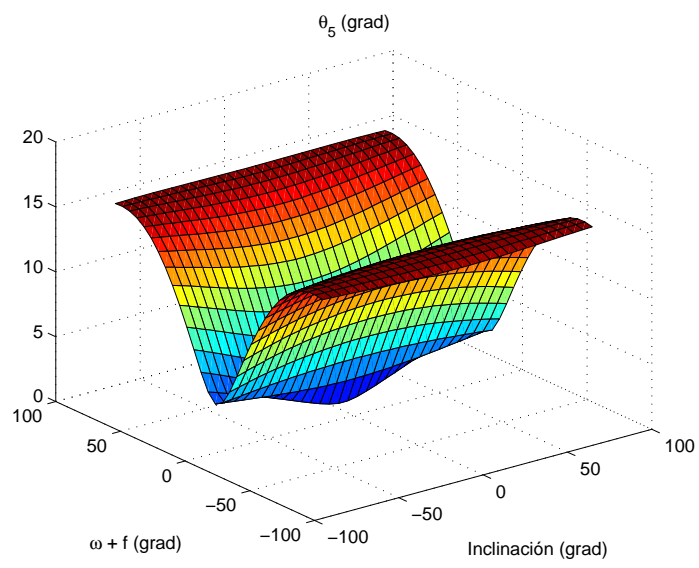


Figura 4.108

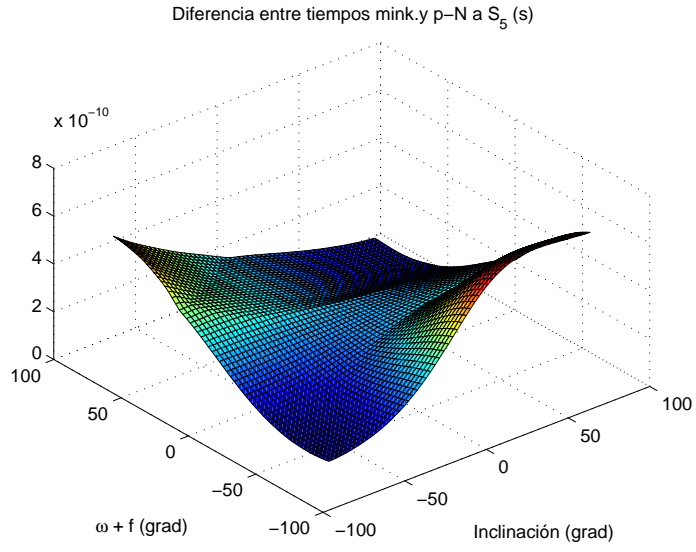


Figura 4.109

Dado que las distancias angulares entre receptores son amplias, como refleja el arco de valores que abarcan $(\omega + f)$ y las inclinaciones de los satélites, aparecen resultados equilibrados para las diferencias de magnitudes relacionadas con FDOA: las diferencias de velocidades se encuentran entre $-1 \times 10^{-3} \text{ km/s}$ y $1.5 \times 10^{-3} \text{ km/s}$ (figura 4.110) y las diferencias de frecuencias están entre -0.2 MHz y 0.3 MHz (figura 4.112).

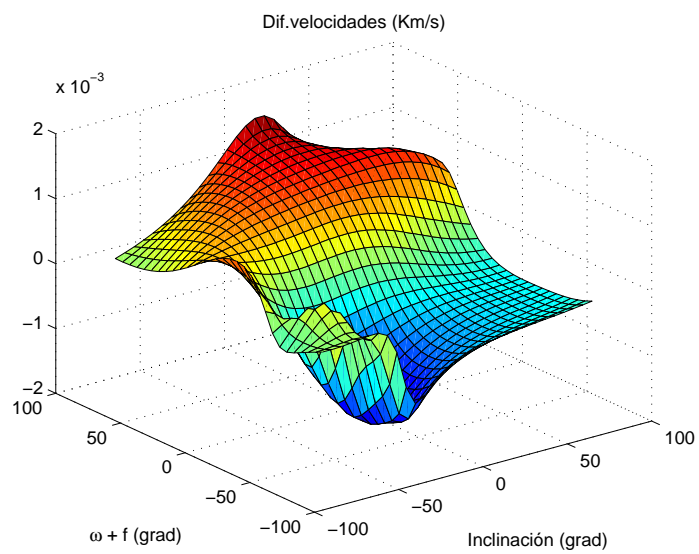


Figura 4.110

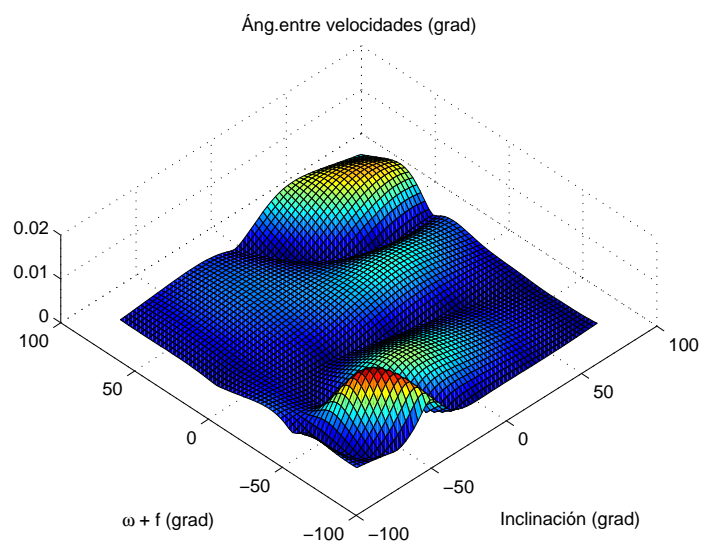


Figura 4.111

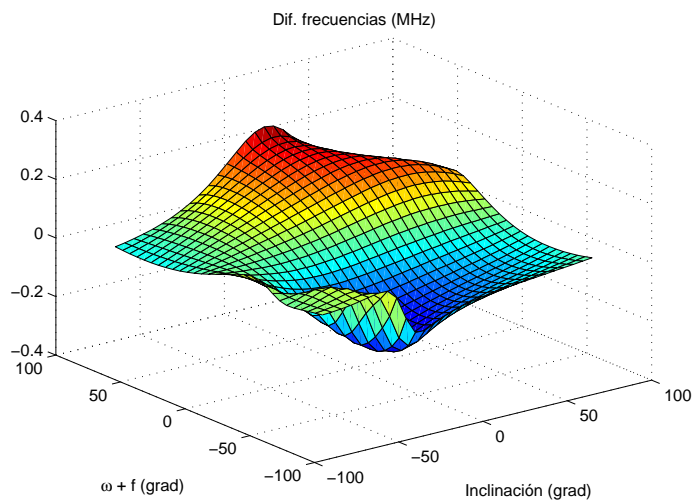


Figura 4.112

En esta simulación se realiza una geolocalización que abarca todo el intervalo de observación, objetivo nada sencillo dado que los elementos orbitales de cada satélite se convierten en variables interdependientes. Calcular analíticamente una configuración idónea predeterminada puede llegar a ser una tarea ingente, por lo que se ha adoptado una solución alternativa mediante aproximaciones a través de sucesivas simulaciones, que son las expuestas en este capítulo. Con un número mayor de satélites la situación no es tan exigente, puesto que el consiguiente aumento de variables hace que no todas sean críticas; de hecho, en los ejemplos que constituyen las subsecciones 3.2.3 y 3.3.3, los respectivos procedimientos TDOA y FDOA pueden llevarse a cabo en paralelo y en tiempo real en todo el dominio de observación.

Aún así, parcelar el rango de observación en intervalos siempre tiene su utilidad y dependiendo del escenario hay situaciones que hacen aconsejable elegir una geolocalización parcial, generalmente cuando la prioridad es la precisión.

Por tanto, en este capítulo, que cierra la investigación, se han puesto a prueba las condiciones analíticas que quedaban establecidas en el capítulo tres; se han probado configuraciones de un número variable de satélites entre cinco y nueve. Sabemos que no es posible una geolocalización única por debajo de cinco receptores. Las operaciones TDOA y FDOA pueden ser realizadas simultáneamente por los mismos satélites aprovechando las órbitas más pobladas y destinando algunos de los ya existentes a estos procedimientos. Destaca el hecho de que con un número

cualquiera de ellos no menor de cinco, la geolocalización puede llevarse a cabo en todo el campo de observación sin renunciar al aumento de la precisión en la determinación de posiciones, ángulos, velocidades y frecuencias.

Capítulo 5

Conclusiones

El método propuesto en esta tesis pretende aportar una contribución a la técnica TDOA-FDOA de geolocalización de un radiotransmisor mediante satélites artificiales. Si bien esta técnica se viene utilizando con éxito en distintos ámbitos, su uso mayoritario se dedica a la geolocalización de emisores que están sobre la superficie terrestre. Las posibilidades que brindan los actuales sistemas de satélites, dotados de relojes atómicos, junto con las estaciones de satélites espaciales y terrestres permiten desarrollar tareas de gran precisión [63]. Sin embargo, los cálculos aplicados a las mediciones están basados aún en un formalismo minkowskiano, a veces llamado clásico o newtoniano. Es decir, las ecuaciones de geolocalización por TDOA-FDOA todavía se plantean únicamente en el marco de la Relatividad Especial.

El desarrollo de sistemas de navegación por satélite ha contribuido notablemente al avance en los métodos de geolocalización al proporcionar datos precisos de efemérides en tiempo real. Estos sistemas incorporan correcciones minkowskianas en sus cálculos. No obstante, no deben confundirse ambos problemas: en Navegación el receptor es el que necesita conocer su posición, obtenida de los emisores, que son los satélites. Por tanto, la Geolocalización es el problema inverso de la Navegación. Esta concepción ha sido fundamental desde un principio en la comprensión del tema, en esta tesis.

El planteamiento ve aumentado su interés cuando el objetivo consiste en geolocalizar un radiotransmisor que no se identifica y no colabora en su localización, es decir, un radiotransmisor pasivo. La técnica TDOA es especialmente adecuada en este tipo de operaciones. Un paso más allá consiste en lograr una geolocalización única. Esta cuestión quedó totalmente resuelta con un método que propone la utilización de una configuración no menor de cinco satélites, el cual emplea un tratamiento posnewtoniano en su resolución ([30]).

El paso siguiente se presentaba ante nuestros ojos: emplear una técnica basada en la medida de la diferencia de frecuencias, FDOA, en la geolocalización del radiotransmisor pasivo, bien como un método de geolocalización única, bien como complemento de la técnica TDOA. La técnica combinada TDOA-FDOA está encuadrada dentro de las de gran precisión. Puesto que TDOA por sí sola provee las coordenadas espacio-temporales del emisor, en el instante de emisión, hemos utilizado estos datos de tiempo y posición y los hemos introducido en las ecuaciones FDOA. Este ha sido el nudo central de este trabajo de investigación. Téngase en cuenta que con los datos TDOA del emisor disponibles para ser introducidos en las ecuaciones FDOA, estas aparecen libres para determinar nuevas incógnitas. Efectivamente, cuando se desarrolla la ecuación FDOA salen a la luz las componentes de la velocidad del emisor y la frecuencia de emisión. Por consiguiente, hay que plantear un sistema de cuatro ecuaciones para hallar estas cuatro incógnitas. En la aproximación minkowskiana, los resultados que hemos obtenido coinciden, como era de esperar, con los que arroja el método estándar utilizado actualmente en Geolocalización ([43], [44]). Ahora bien, nuestro propósito ha sido aumentar la precisión que se consigue con este método y ello conlleva situarnos en un modelo que se enmarque en el espacio-tiempo de la Relatividad General. Esto se ha hecho usando la aproximación posnewtoniana del campo de Schwarzschild para una tierra esférica.

Hemos obtenido, por tanto, las ecuaciones TDOA y FDOA para la geolocalización de radiotransmisores pasivos en estas dos aproximaciones. Una novedad más la constituye la vía por la que se ha llegado a ellas, una poderosa herramienta matemática: la función de universo de Synge. El requisito ha sido hallar esta función para los dos espacio-tiempos: minkowskiano, ecuación (2.3.1), y posnewtoniano, ecuaciones (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8). La propiedad fundamental de que la función de universo correspondiente a dos sucesos de un espacio-tiempo unidos por una señal electromagnética es nula, ecuación (3.1.1), nos ha llevado a la deducción de las ecuaciones TDOA ((3.1.6), (3.1.7) y (3.1.8)). Posteriormente, derivando las funciones de universo obtenidas se ha llegado a las ecuaciones FDOA ((3.1.15), (3.1.16) y (3.1.17)). El sistema de ecuaciones posnewtonianas es no lineal, ya que aparecen términos cuadráticos en las velocidades del transmisor, por lo que hemos iterado la solución minkowskiana para resolverlo.

Estudiando la naturaleza de los sistemas de ecuaciones se han hallado las condiciones para que exista solución única para TDOA, por un lado, y para FDOA, por otro. La previsión para los sistemas FDOA era involucrar únicamente cuatro satélites, pero el estudio de los sistemas así constituidos nos revela que hay que elegir, al menos, cinco para obtener sistemas linealmente independientes, con solución

única. Las condiciones TDOA y FDOA que hemos establecido analíticamente son condiciones suficientes, por tanto no permiten una previsión ajustada de lo se va a obtener, sino solamente afirmar que cuando se dan, la situación esperada puede suceder.

Con las soluciones encontradas en cada aproximación, se hace necesaria la comparación y comprobación de los resultados. Hay que someterlas a verificación y poner en juego las correcciones posnewtonianas para ver que contribuciones aportan. Para ello se ha desarrollado un buen número de simulaciones numéricas en varios escenarios y se han puesto a prueba condiciones cercanas a la singularidad para respaldar la consistencia de los sistemas planteados. Se dedica el capítulo cuatro a exponer las simulaciones seleccionadas de entre todas las llevadas a cabo. Analizando los resultados que se muestran a lo largo del capítulo y teniendo en cuenta lo afirmado al final del mismo, se extrae la conclusión inmediata de que no existe un patrón común para las contribuciones posnewtonianas que se discuten en el capítulo tres. Las gráficas ilustran el comportamiento de las magnitudes de interés y de la diferencia de magnitudes obtenidas mediante los dos planteamientos, en los intervalos que se señalan. Con las condiciones establecidas analíticamente en el capítulo tres, no se pueden anticipar configuraciones de satélites óptimas para determinadas situaciones que previamente se planteen. Sí permiten, sin embargo, por aproximación determinar un escenario donde las correcciones posnewtonianas sean verdaderamente muy relevantes.

Creemos que con este trabajo de investigación se pone en valor la importancia de mejorar la precisión en la geolocalización de un radiotransmisor que se halla alrededor de la Tierra, en lugares cada día más poblados de otros objetos que orbitan en el espacio exterior. La potencia del método propuesto permite encontrar:

- La posición de un emisor en el instante de emisión.
- El propio instante.
- La dirección y magnitud de la velocidad que tiene en el momento de la emisión.
- La frecuencia de emisión.

Todo ello en tiempo real, sin un extraordinario coste operativo ni económico.

Una geolocalización muy precisa está en la base de un conjunto de operaciones que se llevan a cabo en complejos sistemas APT, *Acquisition, Pointing and Tracking*, es decir, sistemas cada vez más desarrollados en operaciones integradas de adquisición,

apuntamiento y monitorización de cualquier tipo de emisores o conjunto de emisores en redes de comunicaciones y vigilancia en el espacio cercano ([64], [65], [66]).

Un problema actual, íntimamente relacionado, en el que se requiere una localización de gran precisión, aunque el objeto no es generalmente un radiotransmisor, es la basura espacial o *space debris*. Los desechos espaciales más peligrosos tienen un tamaño medio aproximado de 10 cm, la mayor parte de ellos está en órbitas que se encuentran a distancias entre 200 km y 2000 km de la Tierra y suponen una verdadera amenaza a satélites y otros objetos que se hallan operativos en el espacio ([67], [68]).

Estos son los dos temas hacia los que se ha pensado dirigir nuestro trabajo futuro como continuación de la investigación desarrollada. La cuestión está abierta y en continuo avance.

Apéndice A

Programa en MATLAB

```
1 clear all
  clc

  f=linspace(0,20,30);
  inclinacion_emi=linspace(-50,50,30);
6
  for i=1:30
    for j=1:30

      [A(i,j),B(i,j),C(i,j),D(i,j),E(i,j),F(i,j),G(i,j),H(i,j),I(i,j),J(i,j),
        K(i,j),L(i,j),M(i,j),N(i,j),O(i,j)]=...
11      programa_Geol_TDOA_FDOA_por_sat(f(i),inclinacion_emi(j));
    end
  end

  bd=inclinacion_emi;
16 cd=f;
  figure (1)
    [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
    surf(X,Y,A);
    xlabel('Inclinacion (grad)')
21    ylabel('\omega + f (grad)');
    title('Comp.pos.clasica (m)')
  figure (2)
    [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
    surf(X,Y,B);
26 xlabel('Inclinacion (grad)')
    ylabel('\omega + f (grad)');
    title('Dif.distancias mink.y p-N (m)')
  figure (3)
    [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
```

```

31 surf(X,Y,C);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
       title('Test vel.clasica')
   figure(4)
36 [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,D);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
       title('v- $\{E\}$  (Km/s)')
41 figure(5)
   [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,E);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
46   title('Dif.velocidades (Km/s)')
   figure(6)
   [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,F);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
51   title('Ang.entre velocidades (grad)')
   figure(7)
   [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,G);
56 xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
       title('Dif. frecuencias (MHz)')
   figure(8)
   [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
61 surf(X,Y,H);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
       title('\theta_1 (grad)')
       figure(9)
66 [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,I);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
       title('\theta_2 (grad)')
71 figure(10)
   [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
   surf(X,Y,J);
   xlabel('Inclinacion (grad)')
       ylabel('\omega + f (grad)');
76   title('\theta_3 (grad)')
   figure(11)

```

```

[X,Y]=meshgrid(bd,cd);
surf(X,Y,K);
xlabel('Inclinacion (grad)')
81 ylabel('\omega + f (grad)');
    title('\theta_4 (grad)')
figure(12)
[X,Y]=meshgrid(bd,cd);
surf(X,Y,L);
86 xlabel('Inclinacion (grad)')
    ylabel('\omega + f (grad)');
    title('\theta_5 (grad)')
figure(13)
[X,Y]=meshgrid(bd,cd);
91 surf(X,Y,M);
    xlabel('Inclinacion (grad)')
    ylabel('\omega + f (grad)');
    title('Tiempo mink. a S_{5} (s)')
figure(14)
96 [X,Y]=meshgrid(bd,cd);
surf(X,Y,N);
    xlabel('Inclinacion (grad)')
    ylabel('\omega + f (grad)');
    title('Tiempo p-N a S_{5} (s)')
101 figure(15)
[X,Y]=meshgrid(bd,cd);
surf(X,Y,O);
    xlabel('Inclinacion (grad)')
    ylabel('\omega + f (grad)');
106 title('Diferencia entre tiempos mink.y p-N a S_5 (s)')

```

A.1 – Función

```

1 function [cheqposclasesm,denm,testvelclas,solvEenKmporsec,
    difvelocidadesrelenKmporsec,...
        angdevelocidades,difdefrecuencias_clas_rel,tita1engrad,
            tita2engrad,tita3engrad,...
        tita4engrad,tita5engrad,tiempoderetardoclaswrts5,...
        tiempoderetardopostwrts5,diferenciadetiempoas5]=
        programa_Geol_TDOA_FDOA_por_sat(f,inclinacion_emi)
    format long g
6
c=2.99776*10^(8);

angulo1=10;
inclinacion1=45;
11 angulo1=0;
radio1=(2.7002*10^(-2));

```

```

x1=radio1*(cos(angulo1*pi/180)*cos(angulof1*pi/180)-sin(angulo1*pi
/180)*sin(angulof1*pi/180)*cos(inclinacion1*pi/180));
y1=radio1*(sin(angulo1*pi/180)*cos(angulof1*pi/180)+cos(angulo1*pi
/180)*sin(angulof1*pi/180)*cos(inclinacion1*pi/180));
16 z1=radio1*sin(angulof1*pi/180)*sin(inclinacion1*pi/180);

angulo2=-70;
inclinacion2=0;
angulof2=0;
21 radio2=(14.002*10^(-2));

x2=radio2*(cos(angulo2*pi/180)*cos(angulof2*pi/180)-sin(angulo2*pi
/180)*sin(angulof2*pi/180)*cos(inclinacion2*pi/180));
y2=radio2*(sin(angulo2*pi/180)*cos(angulof2*pi/180)+cos(angulo2*pi
/180)*sin(angulof2*pi/180)*cos(inclinacion2*pi/180));
z2=radio2*sin(angulof2*pi/180)*sin(inclinacion2*pi/180);
26

angulo3=-55;
inclinacion3=4;
angulof3=20;
radio3=(8.002*10^(-2));
31

x3=radio3*(cos(angulo3*pi/180)*cos(angulof3*pi/180)-sin(angulo3*pi
/180)*sin(angulof3*pi/180)*cos(inclinacion3*pi/180));
y3=radio3*(sin(angulo3*pi/180)*cos(angulof3*pi/180)+cos(angulo3*pi
/180)*sin(angulof3*pi/180)*cos(inclinacion3*pi/180));
z3=radio3*sin(angulof3*pi/180)*sin(inclinacion3*pi/180);

36 angulo4=6;
inclinacion4=35;
angulof4=0.4;
radio4=(4.002*10^(-2));

41 x4=radio4*(cos(angulo4*pi/180)*cos(angulof4*pi/180)-sin(angulo4*pi
/180)*sin(angulof4*pi/180)*cos(inclinacion4*pi/180));
y4=radio4*(sin(angulo4*pi/180)*cos(angulof4*pi/180)+cos(angulo4*pi
/180)*sin(angulof4*pi/180)*cos(inclinacion4*pi/180));
z4=radio4*sin(angulof4*pi/180)*sin(inclinacion4*pi/180);

angulo5=9;
46 inclinacion5=0;
angulof5=0;
radio5=(14.002*10^(-2));

x5=radio5*(cos(angulo5*pi/180)*cos(angulof5*pi/180)-sin(angulo5*pi
/180)*sin(angulof5*pi/180)*cos(inclinacion5*pi/180));

```

```

51 y5=radio5*(sin(angulo5*pi/180)*cos(angulof5*pi/180)+cos(angulo5*pi
    /180)*sin(angulof5*pi/180)*cos(inclinacion5*pi/180));
    z5=radio5*sin(angulof5*pi/180)*sin(inclinacion5*pi/180);

56 SATELLITEDATA=[angulo1 inclinacion1 angulof1 radio1; angulo2
    inclinacion2 ...
    angulof2 radio2; angulo3 inclinacion3 angulof3 radio3; angulo4
    inclinacion4 angulof4 radio4; angulo5 inclinacion5 angulof5
    radio5]

nodo_emi=0;

61 x_emi=(2.140*10^(-2))*(cos(nodo_emi*pi/180)*cos(f*pi/180)-sin(nodo_emi
    *pi/180)*sin(f*pi/180)*cos(inclinacion_emi*pi/180));
    y_emi=(2.140*10^(-2))*(sin(nodo_emi*pi/180)*cos(f*pi/180)+cos(nodo_emi
    *pi/180)*sin(f*pi/180)*cos(inclinacion_emi*pi/180));
    z_emi=(2.140*10^(-2))*sin(f*pi/180)*sin(inclinacion_emi*pi/180);
    r_emi=sqrt((x_emi)^2+(y_emi)^2+(z_emi)^2);

66 erre1=sqrt((x1-x_emi)^2+(y1-y_emi)^2+(z1-z_emi)^2);
    erre2=sqrt((x2-x_emi)^2+(y2-y_emi)^2+(z2-z_emi)^2);
    erre3=sqrt((x3-x_emi)^2+(y3-y_emi)^2+(z3-z_emi)^2);
71 erre4=sqrt((x4-x_emi)^2+(y4-y_emi)^2+(z4-z_emi)^2);
    erre5=sqrt((x5-x_emi)^2+(y5-y_emi)^2+(z5-z_emi)^2);

    r21=erre2-erre1;
76 r32=erre3-erre2;
    r31=erre3-erre1;
    r42=erre4-erre2;
    r41=erre4-erre1;
    r43=erre4-erre3;
81 r51=erre5-erre1;
    r54=erre5-erre4;
    r52=erre5-erre2;
    r35=erre3-erre5;

86 k1=x1^2+y1^2+z1^2;
    k2=x2^2+y2^2+z2^2;
    k3=x3^2+y3^2+z3^2;
    k4=x4^2+y4^2+z4^2;
    k5=x5^2+y5^2+z5^2;
91 pdto1=r32*r21*r31;

```

```

    pdto2=r43*r31*r41;
    pdto5=r54*r41*r51;
    l1=r32*k1+r21*k3-r31*k2;
    m1=-2*(r32*x1+r21*x3-r31*x2);
96  n1=-2*(r32*y1+r21*y3-r31*y2);
    v1=-2*(r32*z1+r21*z3-r31*z2);
    l2=r43*k1+r31*k4-r41*k3;
    m2=-2*(r43*x1+r31*x4-r41*x3);
    n2=-2*(r43*y1+r31*y4-r41*y3);
101 v2=-2*(r43*z1+r31*z4-r41*z3);
    l5=r54*k1+r41*k5-r51*k4;
    m5=-2*(r54*x1+r41*x5-r51*x4);
    n5=-2*(r54*y1+r41*y5-r51*y4);
    v5=-2*(r54*z1+r41*z5-r51*z4);
106 A0=[m1 n1 v1;m2 n2 v2; m5 n5 v5];

    [L,U]=lu(A0);
    INVERSAA0=inv(U)*inv(L);
111 det0=det(A0);

    inversaA0=INVERSAA0;

116 terminosindep=[(pdto1-l1); (pdto2-l2); (pdto5-l5)];

    X=(inv(A0'*A0))*A0'*terminosindep;

    xx= X(1,1);
121 yy= X(2,1);
    zz= X(3,1);
    cheqxx=(xx-x_emi);
    cheqyy=(yy-y_emi);
    cheqzz=(zz-z_emi);
126 cheqposclas=sqrt(cheqxx^2+cheqyy^2+cheqzz^2);
    cheqposclasn=cheqposclas*c;
    rT=sqrt(xx^2+yy^2+zz^2);

131 if (x1-xx)*xx+(y1-yy)*yy+(z1-zz)*zz>=0
    tita01=acos(((x1-xx)*xx+(y1-yy)*yy+(z1-zz)*zz)/(sqrt((x1-xx)^2+(y1-yy)^2+(z1-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2)));
    else
    tita01=acos(-(((x1-xx)*xx+(y1-yy)*yy+(z1-zz)*zz)/(sqrt((x1-xx)^2+(y1-yy)^2+(z1-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2))));
    end
136 if (x2-xx)*xx+(y2-yy)*yy+(z2-zz)*zz>=0

```



```

tita02=acos(((x2-xx)*xx+(y2-yy)*yy+(z2-zz)*zz)/(sqrt((x2-xx)^2+(y2-yy)^2+(z2-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2)));
else
tita02=acos(-(((x2-xx)*xx+(y2-yy)*yy+(z2-zz)*zz)/(sqrt((x2-xx)^2+(y2-yy)^2+(z2-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2))));
end
141 if (x3-xx)*xx+(y3-yy)*yy+(z3-zz)*zz>=0
tita03=acos(((x3-xx)*xx+(y3-yy)*yy+(z3-zz)*zz)/(sqrt((x3-xx)^2+(y3-yy)^2+(z3-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2)));
else
tita03=acos(-(((x3-xx)*xx+(y3-yy)*yy+(z3-zz)*zz)/(sqrt((x3-xx)^2+(y3-yy)^2+(z3-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2))));
end
146 if (x4-xx)*xx+(y4-yy)*yy+(z4-zz)*zz>=0
tita04=acos(((x4-xx)*xx+(y4-yy)*yy+(z4-zz)*zz)/(sqrt((x4-xx)^2+(y4-yy)^2+(z4-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2)));
else
tita04=acos(-(((x4-xx)*xx+(y4-yy)*yy+(z4-zz)*zz)/(sqrt((x4-xx)^2+(y4-yy)^2+(z4-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2))));
end
151 if (x5-xx)*xx+(y5-yy)*yy+(z5-zz)*zz>=0
tita05=acos(((x5-xx)*xx+(y5-yy)*yy+(z5-zz)*zz)/(sqrt((x5-xx)^2+(y5-yy)^2+(z5-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2)));
else
tita05=acos(-(((x5-xx)*xx+(y5-yy)*yy+(z5-zz)*zz)/(sqrt((x5-xx)^2+(y5-yy)^2+(z5-zz)^2)*sqrt(xx^2+yy^2+zz^2))));
end
156
tita01grad=tita01*180/pi;
tita02grad=tita02*180/pi;
tita03grad=tita03*180/pi;
161 tita04grad=tita04*180/pi;
tita05grad=tita05*180/pi;

if (x1-x_emi)*x1+(y1-y_emi)*y1+(z1-z_emi)*z1>=0
166 tita1=acos(((x1-x_emi)*x1+(y1-y_emi)*y1+(z1-z_emi)*z1)/((sqrt((x1-x_emi)^2+(y1-y_emi)^2+(z1-z_emi)^2))*sqrt(k1)));
else
tita1=acos(-(((x1-x_emi)*x1+(y1-y_emi)*y1+(z1-z_emi)*z1)/((sqrt((x1-x_emi)^2+(y1-y_emi)^2+(z1-z_emi)^2))*sqrt(k1))));
end
if (x2-x_emi)*x2+(y2-y_emi)*y2+(z2-z_emi)*z2>=0
171 tita2=acos(((x2-x_emi)*x2+(y2-y_emi)*y2+(z2-z_emi)*z2)/((sqrt((x2-x_emi)^2+(y2-y_emi)^2+(z2-z_emi)^2))*sqrt(k2)));
else

```

```

tita2=acos(-(((x2-x_emi)*x2+(y2-y_emi)*y2+(z2-z_emi)*z2))/((sqrt((x2-
x_emi)^2+(y2-y_emi)^2+(z2-z_emi)^2))*sqrt(k2)));
end
if (x3-x_emi)*x3+(y3-y_emi)*y3+(z3-z_emi)*z3>=0
176 tita3=acos(((x3-x_emi)*x3+(y3-y_emi)*y3+(z3-z_emi)*z3)/((sqrt((x3-
x_emi)^2+(y3-y_emi)^2+(z3-z_emi)^2))*sqrt(k3)));
else
tita3=acos(-(((x3-x_emi)*x3+(y3-y_emi)*y3+(z3-z_emi)*z3))/((sqrt((x3-
x_emi)^2+(y3-y_emi)^2+(z3-z_emi)^2))*sqrt(k3)));
end
if (x4-x_emi)*x4+(y4-y_emi)*y4+(z4-z_emi)*z4>=0
181 tita4=acos(((x4-x_emi)*x4+(y4-y_emi)*y4+(z4-z_emi)*z4)/((sqrt((x4-
x_emi)^2+(y4-y_emi)^2+(z4-z_emi)^2))*sqrt(k4)));
else
tita4=acos(-(((x4-x_emi)*x4+(y4-y_emi)*y4+(z4-z_emi)*z4))/((sqrt((x4-
x_emi)^2+(y4-y_emi)^2+(z4-z_emi)^2))*sqrt(k4)));
end
if (x5-x_emi)*x5+(y5-y_emi)*y5+(z5-z_emi)*z5>=0
186 tita5=acos(((x5-x_emi)*x5+(y5-y_emi)*y5+(z5-z_emi)*z5)/((sqrt((x5-
x_emi)^2+(y5-y_emi)^2+(z5-z_emi)^2))*sqrt(k5)));
else
tita5=acos(-(((x5-x_emi)*x5+(y5-y_emi)*y5+(z5-z_emi)*z5))/((sqrt((x5-
x_emi)^2+(y5-y_emi)^2+(z5-z_emi)^2))*sqrt(k5)));
end
191 tita1engrad=tita1*180/pi;
tita2engrad=tita2*180/pi;
tita3engrad=tita3*180/pi;
tita4engrad=tita4*180/pi;
tita5engrad=tita5*180/pi;
196 masatierra=1.479*10^(-11);

if tita1 <=10^(-12)
Gdetita12=2*masatierra*log((radio1)/(rT))+masatierra*(2*log((tan(
tita2/2)))/((tan(tita02/2))))-(cos(tita02)-cos(tita2))
201 else
Gdetita12=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita2/2)))/((tan(
tita02/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita02)) +...
(cos(tita2)-cos(tita1));
end
vertita1=tita1;
206 pepel=Gdetita12;

if tita2 <=10^(-12)
Gdetita12=-2*masatierra*log((radio2)/(rT))+masatierra*(2*log((tan(
tita01/2)))/((tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita1))

```

```

else
211 Gdetita12=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita2/2))/((tan(
    tita02/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita02))+cos(tita2)-
    cos(tita1));
end

vertita2=tita2;
pepe2=Gdetita12;

216 if tita3 <=10^(-12)
    Gdetita23=masatierra*(2*(log((tan(tita02/2))/tan(tita2/2)))+(cos(
        tita02)-cos(tita2))-2*masatierra*log((radio3)/(rT)));
    else
    Gdetita23=masatierra*(2*(log((tan(tita02/2))*tan(tita3/2))/((tan(
        tita03/2))*tan(tita2/2))))+(cos(tita02)-cos(tita03)) +cos(tita3)
        -cos(tita2));
221 end

    if tita2 <=10^(-12)
        Gdetita23=2*masatierra*log((radio2)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(
            tita3/2))/tan(tita03/2)))-(cos(tita03)-cos(tita3)));
        else
226 Gdetita23=masatierra*(2*(log((tan(tita02/2))*tan(tita3/2))/((tan(
            tita03/2))*tan(tita2/2))))+(cos(tita02)-cos(tita03)) +cos(tita3)
            -cos(tita2));
        end

    if tita1 <=10^(-12)
        Gdetita14=2*masatierra*log((radio1)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(
            tita4/2))/tan(tita04/2)))-(cos(tita04)-cos(tita4)));
231 else
    Gdetita14=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita4/2))/((tan(
        tita04/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita04)) +cos(tita4)
        -cos(tita1));
    end

    if tita4 <=10^(-12)
236 Gdetita14=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))/tan(tita1/2)))+(cos(
        tita01)-cos(tita1))-2*masatierra*log((radio4)/(rT)));
    else
    Gdetita14=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita4/2))/((tan(
        tita04/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita04)) +cos(tita4)
        -cos(tita1));
    end

241 if tita3 <=10^(-12)
    Gdetita34=2*masatierra*log((radio3)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(

```

```

        tita4/2))/((tan(tita04/2)))))-(cos(tita04)-cos(tita4)));
else
Gdetita34=masatierra*(2*(log((tan(tita03/2))*(tan(tita4/2))/((tan(
    tita04/2))*(tan(tita3/2))))) +(cos(tita03)-cos(tita04)) +(cos(tita4)
    -cos(tita3)) ));
end
246 if tita4 <=10^(-12)
    Gdetita34=masatierra*(2*(log((tan(tita03/2))/((tan(tita3/2))))) +(cos(
        tita03)-cos(tita3)))-2*masatierra*log((radio4)/(rT));
    else
Gdetita34=masatierra*(2*(log((tan(tita03/2))*(tan(tita4/2))/((tan(
    tita04/2))*(tan(tita3/2))))) +(cos(tita03)-cos(tita04)) +(cos(tita4)
    -cos(tita3)) ));
251 end

    if tita1 <=10^(-12)
Gdetita15=2*masatierra*log((radio1)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(
    tita5/2))/((tan(tita05/2))))) -(cos(tita05)-cos(tita5)));
    else
256 Gdetita15=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*(tan(tita5/2))/((tan(
    tita05/2))*(tan(tita1/2))))) +(cos(tita01)-cos(tita05)) +(cos(tita5)
    -cos(tita1)) ));
    end

    if tita5 <=10^(-12)
Gdetita15=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))/((tan(tita1/2))))) +(cos(
    tita01)-cos(tita1)))-2*masatierra*log((radio5)/(rT));
261 else
Gdetita15=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*(tan(tita5/2))/((tan(
    tita05/2))*(tan(tita1/2))))) +(cos(tita01)-cos(tita05)) +(cos(tita5)
    -cos(tita1)) ));
    end

    if tita4 <=10^(-12)
266 Gdetita45=2*masatierra*log((radio4)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(
    tita5/2))/((tan(tita05/2))))) -(cos(tita05)-cos(tita5)));
    else
Gdetita45=masatierra*(2*(log((tan(tita04/2))*(tan(tita5/2))/((tan(
    tita05/2))*(tan(tita4/2))))) +(cos(tita04)-cos(tita05)) +(cos(tita5)
    -cos(tita4)) ));
    end

271 if tita5 <=1^0(-12)
Gdetita45=masatierra*(2*(log((tan(tita04/2))/((tan(tita4/2))))) +(cos(
    tita04)-cos(tita4)))-2*masatierra*log((radio5)/(rT));
    else

```

```

Gdetita45=masatierra*(2*(log((tan(tita04/2))*tan(tita5/2))/((tan(
    tita05/2))*tan(tita4/2))))+(cos(tita04)-cos(tita05)) +(cos(tita5)
    -cos(tita4)) );
end
276 if tita1 <=10^(-12)
    Gdetita13=2*masatierra*log((radio1)/(rT))+masatierra*(2*(log((tan(
        tita3/2))/((tan(tita03/2)))))-(cos(tita03)-cos(tita3)));
    else
    Gdetita13=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita3/2))/((tan(
        tita03/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita03)) +(cos(tita3)
        -cos(tita1)) );
281 end

if tita3 <=10^(-12)
    Gdetita13=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))/(tan(tita1/2))))+(cos(
        tita01)-cos(tita1)))-2*masatierra*log((radio3)/(rT));
    else
286 Gdetita13=masatierra*(2*(log((tan(tita01/2))*tan(tita3/2))/((tan(
        tita03/2))*tan(tita1/2))))+(cos(tita01)-cos(tita03)) +(cos(tita3)
        -cos(tita1)) );
    end

eta21=(Gdetita12)/(r21);
eta32=(Gdetita23)/(r32);
291 eta31=(Gdetita13)/(r31);
eta43=(Gdetita34)/(r43);
eta41=(Gdetita14)/(r41);
eta54=(Gdetita45)/(r54);
eta51=(Gdetita15)/(r51);
296

pdto11=r32*r21*r31;
pdto21=r43*r31*r41;
pdto51=r54*r41*r51;
301 l11=(r32*k1+r21*k3-r31*k2)*(1+eta32)*(1+eta21)*(1+eta31);
m11=-2*(r32*x1+r21*x3-r31*x2)*(1+eta32)*(1+eta21)*(1+eta31);
n11=-2*(r32*y1+r21*y3-r31*y2)*(1+eta32)*(1+eta21)*(1+eta31);
v11=-2*(r32*z1+r21*z3-r31*z2)*(1+eta32)*(1+eta21)*(1+eta31);
l21=(r43*k1+r31*k4-r41*k3)*(1+eta43)*(1+eta31)*(1+eta41);
306 m21=-2*(r43*x1+r31*x4-r41*x3)*(1+eta43)*(1+eta31)*(1+eta41);
n21=-2*(r43*y1+r31*y4-r41*y3)*(1+eta43)*(1+eta31)*(1+eta41);
v21=-2*(r43*z1+r31*z4-r41*z3)*(1+eta43)*(1+eta31)*(1+eta41);
l51=(r54*k1+r41*k5-r51*k4)*(1+eta54)*(1+eta41)*(1+eta51);
m51=-2*(r54*x1+r41*x5-r51*x4)*(1+eta54)*(1+eta41)*(1+eta51);
311 n51=-2*(r54*y1+r41*y5-r51*y4)*(1+eta54)*(1+eta41)*(1+eta51);
v51=-2*(r54*z1+r41*z5-r51*z4)*(1+eta54)*(1+eta41)*(1+eta51);

```

```

A0=[m1 n1 v1;m2 n2 v2; m5 n5 v5];
A=[m11 n11 v11; m21 n21 v21; m51 n51 v51];
316 [L1,U1]=lu(A);

inversaA0=inv(A0);
inversaA=inv(A);

321 rangodeA0=rank(A0);

numerodecondicionA0=det(A0)*det(inversaA0);

326 rangodeA=rank(A);
numerodecondicionA=det(A)*det(inversaA0);

terminosindep1=[(pdto11-l11); (pdto21-l21); (pdto51-l51)];

331 XX=(inv(A'*A))*A'*terminosindep1;

        xxuno=XX(1,1);
        yyuno=XX(2,1);
336        zzuno=XX(3,1);

productodematrices0=A0*inversaA0;
productodematrices=A*inversaA;

341 sol_emi=sqrt(x_emi^2+y_emi^2+z_emi^2);
solclasica=sqrt(xx^2+yy^2+zz^2);

cheqsolclassol_emi=solclasica-sol_emi;

346 solrelativista=sqrt(xxuno^2+yyuno^2+zzuno^2);

denm=(sqrt((xx-xxuno)^2+(yy-yyuno)^2+(zz-zzuno)^2))*c;

351 distancia_emiasatcincoclas=(sqrt((xx-x5)^2+(yy-y5)^2+(zz-z5)^2));
distancia_emiasatcincorel=(sqrt((xxuno-x5)^2+(yyuno-y5)^2+(zzuno-z5)^2));
tiempoderetardoclaswrts5=distancia_emiasatcincoclas;

356 if tita5>10^(-9)
tiempoderetardopostwrts5=distancia_emiasatcincorel+masatierra*(2*(log
((tan(tita05/2))/(tan(tita5/2)))+(cos(tita05)-cos(tita5))));

```



```

    anguloSf3=0;
    radioS3=(9.002*10(-2));
401
    xS3=radioS3*(cos(anguloS3*pi/180)*cos(anguloSf3*pi/180)-sin(anguloS3*
        pi/180)*sin(anguloSf3*pi/180)*cos(inclinacionS3*pi/180));
    yS3=radioS3*(sin(anguloS3*pi/180)*cos(anguloSf3*pi/180)+cos(anguloS3*
        pi/180)*sin(anguloSf3*pi/180)*cos(inclinacionS3*pi/180));
    zS3=radioS3*sin(anguloSf3*pi/180)*sin(inclinacionS3*pi/180);
    rS3=sqrt((xS3)^2+(yS3)^2+(zS3)^2);
406

    anguloS4=46.8;
    inclinacionS4=0.2;
411
    anguloSf4=0;
    radioS4=(14.002*10(-2));

    xS4=radioS4*(cos(anguloS4*pi/180)*cos(anguloSf4*pi/180)-sin(anguloS4*
        pi/180)*sin(anguloSf4*pi/180)*cos(inclinacionS4*pi/180));
    yS4=radioS4*(sin(anguloS4*pi/180)*cos(anguloSf4*pi/180)+cos(anguloS4*
        pi/180)*sin(anguloSf4*pi/180)*cos(inclinacionS4*pi/180));
416
    zS4=radioS4*sin(anguloSf4*pi/180)*sin(inclinacionS4*pi/180);
    rS4=sqrt((xS4)^2+(yS4)^2+(zS4)^2);

421
    anguloS5=angulo5;
    inclinacionS5=inclinacion5;
    anguloSf5=angulo5;
    radioS5=radio5;

426
    xS5=radioS5*(cos(anguloS5*pi/180)*cos(anguloSf5*pi/180)-sin(anguloS5*
        pi/180)*sin(anguloSf5*pi/180)*cos(inclinacionS5*pi/180));
    yS5=radioS5*(sin(anguloS5*pi/180)*cos(anguloSf5*pi/180)+cos(anguloS5*
        pi/180)*sin(anguloSf5*pi/180)*cos(inclinacionS5*pi/180));
    zS5=radioS5*sin(anguloSf5*pi/180)*sin(inclinacionS5*pi/180);
    rS5=sqrt((xS5)^2+(yS5)^2+(zS5)^2);

431

    SATELLITEDATA_FDOA=[anguloS1 inclinacionS1 anguloSf1 radioS1; anguloS2
        inclinacionS2 anguloSf2 radioS2;...
        anguloS3 inclinacionS3 anguloSf3 radioS3; anguloS4 inclinacionS4
        anguloSf4 radioS4; anguloS5 inclinacionS5 anguloSf5 radioS5]

436
    vS1=sqrt(masatierra/rS1);

```



```

vS2=sqrt ( masatierra /rS2 );
441 vS3=sqrt ( masatierra /rS3 );

vS4=sqrt ( masatierra /rS4 );
446 vS5=sqrt ( masatierra /rS5 );

vSx1=vS1*(-cos ( anguloS1*pi/180)*sin ( anguloSf1*pi/180)-sin ( anguloS1*pi
/180)*cos ( anguloSf1*pi/180)*cos ( inclinacionS1*pi/180));
vSy1=vS1*(-sin ( anguloS1*pi/180)*sin ( anguloSf1*pi/180)+cos ( anguloS1*pi
/180)*cos ( anguloSf1*pi/180)*cos ( inclinacionS1*pi/180));
vSz1=vS1*cos ( anguloSf1*pi/180)*sin ( inclinacionS1*pi/180);
451

velS1=sqrt ( vSx1^2+vSy1^2+vSz1^2 );
test1=(velS1-vS1)*c;

456 vSx2=vS2*(-cos ( anguloS2*pi/180)*sin ( anguloSf2*pi/180)-sin ( anguloS2*pi
/180)*cos ( anguloSf2*pi/180)*cos ( inclinacionS2*pi/180));
vSy2=vS2*(-sin ( anguloS2*pi/180)*sin ( anguloSf2*pi/180)+cos ( anguloS2*pi
/180)*cos ( anguloSf2*pi/180)*cos ( inclinacionS2*pi/180));
vSz2=vS2*cos ( anguloSf2*pi/180)*sin ( inclinacionS2*pi/180);

461 velS2=sqrt ( vSx2^2+vSy2^2+vSz2^2 );
test2=(velS2-vS2)*c;

vSx3=vS3*(-cos ( anguloS3*pi/180)*sin ( anguloSf3*pi/180)-sin ( anguloS3*pi
/180)*cos ( anguloSf3*pi/180)*cos ( inclinacionS3*pi/180));
466 vSy3=vS3*(-sin ( anguloS3*pi/180)*sin ( anguloSf3*pi/180)+cos ( anguloS3*pi
/180)*cos ( anguloSf3*pi/180)*cos ( inclinacionS3*pi/180));
vSz3=vS3*cos ( anguloSf3*pi/180)*sin ( inclinacionS3*pi/180);

velS3=sqrt ( vSx3^2+vSy3^2+vSz3^2 );
471 test3=(velS3-vS3)*c;

vSx4=vS4*(-cos ( anguloS4*pi/180)*sin ( anguloSf4*pi/180)-sin ( anguloS4*pi
/180)*cos ( anguloSf4*pi/180)*cos ( inclinacionS4*pi/180));
vSy4=vS4*(-sin ( anguloS4*pi/180)*sin ( anguloSf4*pi/180)+cos ( anguloS4*pi
/180)*cos ( anguloSf4*pi/180)*cos ( inclinacionS4*pi/180));
476 vSz4=vS4*cos ( anguloSf4*pi/180)*sin ( inclinacionS4*pi/180);

```

```

481 velS4=sqrt ( vSx4^2+vSy4^2+vSz4 ^2);
    test4=(velS4-vS4)*c;

    vSx5=vS5*(-cos ( anguloS5*pi/180)*sin ( anguloSf5*pi/180)-sin ( anguloS5*pi
        /180)*cos ( anguloSf5*pi/180)*cos ( inclinacionS5*pi/180));
    vSy5=vS5*(-sin ( anguloS5*pi/180)*sin ( anguloSf5*pi/180)+cos ( anguloS5*pi
        /180)*cos ( anguloSf5*pi/180)*cos ( inclinacionS5*pi/180));
    vSz5=vS5*cos ( anguloSf5*pi/180)*sin ( inclinacionS5*pi/180);
486

    velS5=sqrt ( vSx5^2+vSy5^2+vSz5 ^2);
    test5=(velS5-vS5)*c;
491

    xclasS1E=xS1-xx;
    xclasS2E=xS2-xx;
    xclasS3E=xS3-xx;
496 xclasS4E=xS4-xx;
    xclasS5E=xS5-xx;

    yclasS1E=yS1-yy;
    yclasS2E=yS2-yy;
501 yclasS3E=yS3-yy;
    yclasS4E=yS4-yy;
    yclasS5E=yS5-yy;

    zclasS1E=zS1-zz;
506 zclasS2E=zS2-zz;
    zclasS3E=zS3-zz;
    zclasS4E=zS4-zz;
    zclasS5E=zS5-zz;
    %
511 xrelS1E=xS1-xxuno;
    xrelS2E=xS2-xxuno;
    xrelS3E=xS3-xxuno;
    xrelS4E=xS4-xxuno;
    xrelS5E=xS5-xxuno;
516

    yrelS1E=yS1-yyuno;
    yrelS2E=yS2-yyuno;
    yrelS3E=yS3-yyuno;
    yrelS4E=yS4-yyuno;
521 yrelS5E=yS5-yyuno;

```

```

zrelS1E=zS1-zzuno;
zrelS2E=zS2-zzuno;
zrelS3E=zS3-zzuno;
526 zrelS4E=zS4-zzuno;
zrelS5E=zS5-zzuno;

531 dclasS1E=sqrt((xS1-xx)^2+(yS1-yy)^2+(zS1-zz)^2);
dclasS2E=sqrt((xS2-xx)^2+(yS2-yy)^2+(zS2-zz)^2);
dclasS3E=sqrt((xS3-xx)^2+(yS3-yy)^2+(zS3-zz)^2);
dclasS4E=sqrt((xS4-xx)^2+(yS4-yy)^2+(zS4-zz)^2);
dclasS5E=sqrt((xS5-xx)^2+(yS5-yy)^2+(zS5-zz)^2);

536 drelS1E=sqrt((xS1-xxuno)^2+(yS1-yyuno)^2+(zS1-zzuno)^2);
drelS2E=sqrt((xS2-xxuno)^2+(yS2-yyuno)^2+(zS2-zzuno)^2);
drelS3E=sqrt((xS3-xxuno)^2+(yS3-yyuno)^2+(zS3-zzuno)^2);
drelS4E=sqrt((xS4-xxuno)^2+(yS4-yyuno)^2+(zS4-zzuno)^2);
541 drelS5E=sqrt((xS5-xxuno)^2+(yS5-yyuno)^2+(zS5-zzuno)^2);

rtierra=2.125*10^(-2);
omega=7.27*10^(-5);

546 vE=sqrt(masatierra/r_emi);

vEclas=sqrt(masatierra/solclasica);

551 testvelclas=((vE-vEclas)*c/1000)*3600;

vExclas=vEclas*(-cos(nodo_emi*pi/180)*sin(f*pi/180)-sin(nodo_emi*pi
/180)*cos(f*pi/180)*cos(inclinacion_emi*pi/180));
vEyclas=vEclas*(-sin(nodo_emi*pi/180)*sin(f*pi/180)+cos(nodo_emi*pi
/180)*cos(f*pi/180)*cos(inclinacion_emi*pi/180));
556 vEzclas=vEclas*cos(f*pi/180)*sin(inclinacion_emi*pi/180);

fe=1.025*10^3;

561 f1clas=fe*(1-(((vSx1-vExclas)*xclasS1E+(vSy1-vEyclas)*yclasS1E+(vSz1-
vEzclas)*zclasS1E)/dclasS1E));
f2clas=fe*(1-(((vSx2-vExclas)*xclasS2E+(vSy2-vEyclas)*yclasS2E+(vSz2-
vEzclas)*zclasS2E)/dclasS2E));
f3clas=fe*(1-(((vSx3-vExclas)*xclasS3E+(vSy3-vEyclas)*yclasS3E+(vSz3-

```

```

    vEzclas)*zclasS3E)/dclasS3E));
f4clas=fe*(1-(((vSx4-vExclas)*xclasS4E+(vSy4-vEyclas)*yclasS4E+(vSz4-
vEzclas)*zclasS4E)/dclasS4E));
566 f5clas=fe*(1-(((vSx5-vExclas)*xclasS5E+(vSy5-vEyclas)*yclasS5E+(vSz5-
vEzclas)*zclasS5E)/dclasS5E));

FDOA_12_1=f1clas-f2clas;
FDOA_13_1=f1clas-f3clas;
571 FDOA_42_1=f4clas-f2clas;
FDOA_43_1=f4clas-f3clas;
FDOA_45_1=f4clas-f5clas;

576 rS1EvS1= xclasS1E*vSx1+yclasS1E*vSy1+zclasS1E*vSz1;
rS2EvS2= xclasS2E*vSx2+yclasS2E*vSy2+zclasS2E*vSz2;
rS3EvS3= xclasS3E*vSx3+yclasS3E*vSy3+zclasS3E*vSz3;
rS4EvS4= xclasS4E*vSx4+yclasS4E*vSy4+zclasS4E*vSz4;
581 rS5EvS5= xclasS5E*vSx5+yclasS5E*vSy5+zclasS5E*vSz5;

nS1EvS1= rS1EvS1/dclasS1E;
nS2EvS2= rS2EvS2/dclasS2E;
586 nS3EvS3= rS3EvS3/dclasS3E;
nS4EvS4= rS4EvS4/dclasS4E;
nS5EvS5= rS5EvS5/dclasS5E;

591 c=2.99776*10^(8);

B11=(xclasS1E/dclasS1E)-(xclasS2E/dclasS2E);
B12=(yclasS1E/dclasS1E)-(yclasS2E/dclasS2E);
596 B13=(zclasS1E/dclasS1E)-(zclasS2E/dclasS2E);
B14=-(FDOA_12_1);
B21=(xclasS1E/dclasS1E)-(xclasS3E/dclasS3E);
B22=(yclasS1E/dclasS1E)-(yclasS3E/dclasS3E);
B23=(zclasS1E/dclasS1E)-(zclasS3E/dclasS3E);
601 B24=-(FDOA_13_1);
B31=(xclasS4E/dclasS4E)-(xclasS2E/dclasS2E);
B32=(yclasS4E/dclasS4E)-(yclasS2E/dclasS2E);
B33=(zclasS4E/dclasS4E)-(zclasS2E/dclasS2E);
B34=-(FDOA_42_1);
606 B41=(xclasS4E/dclasS4E)-(xclasS5E/dclasS5E);
B42=(yclasS4E/dclasS4E)-(yclasS5E/dclasS5E);
B43=(zclasS4E/dclasS4E)-(zclasS5E/dclasS5E);

```



```

656 | solfemenosuno=cuartoadjunto/DeterminantedeB;
|
| SOL_C=[solveX solveY solveZ solfemenosuno];
| solfe=1/solfemenosuno;
|
| solve=sqrt(solveX^2+solveY^2+solveZ^2);
661 | solveEnKmporsec=solve*c*10^(-3);
|
| %%%%%%%%%%%
|
666 | C=[C1; C2; C3; C4];
| BC= [B C];
|
| rangodeB=rank (B);
| inversaB=inv(B);
671 | numerodecondicionB=det(B)*det(inversaB);
| if numerodecondicionB<1
| 'no vale';
| else
| 'vale';
676 | end
| rangodeBC=rank (BC);
| SOL_G=rref(BC);
|
681 | %%%%%%%%%%%
|
| B11rel=(xclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(xclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
| ;
| B12rel=(yclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(yclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
| ;
686 | B13rel=(zclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(zclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
| ;
| B14rel=-(FDOA_12_1);
| B21rel=(xclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(xclasS3E/dclasS3E)*(1-nS3EvS3)
| ;
| B22rel=(yclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(yclasS3E/dclasS3E)*(1-nS3EvS3)
| ;
| B23rel=(zclasS1E/dclasS1E)*(1-nS1EvS1)-(zclasS3E/dclasS3E)*(1-nS3EvS3)
| ;
691 | B24rel=-(FDOA_13_1);
| B31rel=(xclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(xclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
| ;
| B32rel=(yclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(yclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
| ;

```

```

B33rel=(zclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(zclasS2E/dclasS2E)*(1-nS2EvS2)
;
B34rel=-(FDOA_42.1);
696 B41rel=(xclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(xclasS5E/dclasS5E)*(1-nS5EvS5)
;
B42rel=(yclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(yclasS5E/dclasS5E)*(1-nS5EvS5)
;
B43rel=(zclasS4E/dclasS4E)*(1-nS4EvS4)-(zclasS5E/dclasS5E)*(1-nS5EvS5)
;
B44rel=-(FDOA_45.1);
701
H12=(velS1)^2-(velS2)^2;
H13=(velS1)^2-(velS3)^2;
H42=(velS4)^2-(velS2)^2;
706 H45=(velS4)^2-(velS5)^2;
M12=m*((1/rS1)-(1/rS2));
M13=m*((1/rS1)-(1/rS3));
M42=m*((1/rS4)-(1/rS2));
711 M45=m*((1/rS4)-(1/rS5));
n1_vE=(xclasS1E/dclasS1E)*vExclas+(yclasS1E/dclasS1E)*vEyclas+(
zclasS1E/dclasS1E)*vEzclas;
n2_vE=(xclasS2E/dclasS2E)*vExclas+(yclasS2E/dclasS2E)*vEyclas+(
zclasS2E/dclasS2E)*vEzclas;
n3_vE=(xclasS3E/dclasS3E)*vExclas+(yclasS3E/dclasS3E)*vEyclas+(
zclasS3E/dclasS3E)*vEzclas;
716 n4_vE=(xclasS4E/dclasS4E)*vExclas+(yclasS4E/dclasS4E)*vEyclas+(
zclasS4E/dclasS4E)*vEzclas;
n5_vE=(xclasS5E/dclasS5E)*vExclas+(yclasS5E/dclasS5E)*vEyclas+(
zclasS5E/dclasS5E)*vEzclas;
C1rel=(nS1EvS1)-(nS2EvS2)-(1/2)*H12-M12-(n1_vE)^2+(n2_vE)^2;
C2rel=(nS1EvS1)-(nS3EvS3)-(1/2)*H13-M13-(n1_vE)^2+(n3_vE)^2;
721 C3rel=(nS4EvS4)-(nS2EvS2)-(1/2)*H42-M42-(n4_vE)^2+(n2_vE)^2;
C4rel=(nS4EvS4)-(nS5EvS5)-(1/2)*H45-M45-(n4_vE)^2+(n5_vE)^2;
Brel=[B11rel B12rel B13rel B14rel; B21rel B22rel B23rel B24rel; B31rel
B32rel B33rel B34rel; B41rel B42rel B43rel B44rel];
Crel=[C1rel; C2rel; C3rel; C4rel];
726 yyyrel=Brel\Crel;
vEfErel=yyyrel;
vErelx=vEfErel(1,1);
vErely=vEfErel(2,1);

```


Bibliografía

- [1] N. Ashby and J.J.Spilker Jr., Introduction to relativistic effects on the Global Positioning System, in B. W. Parkinson, J.J.Spilker Jr, eds., *Global Positioning System: Theory and Applications*, Vol. 1, chapter 18, pp. 623-697, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, D.C., 1996.
- [2] U. Kostic, M. Horvat, A. Gomboc, Relativistic Positioning System in Perturbed Spacetime, *Classical and Quantum Gravity*, 32, 21, 2015.
- [3] J. M. Gambi, J. Clares, M. C. Rodríguez Teijeiro, Post-Newtonian Geolocation of Passive Radio Transmitters by TDOA and FDOA, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2014*, Springer, 2016.
- [4] H.S. Ruse, Taylor's theorem in the tensor calculus, *Proc. London Math. Soc.*, 32, pp. 87, 1931.
- [5] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory of Relativity*, New York, North-Holland, 1960.
- [6] J. L. Synge, A Characteristic Function in Riemannian Space and Its Applications to the Solution of Geodesic triangles, *Proc. London Math. Soc.* 32, 241, 1931.
- [7] W. A. Almonacid Guerrero, *Problema de los Dos Cuerpos Extendidos en Relatividad General bajo la Aproximación Post-Newtoniana*, Tesis de máster, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia, 2013.
- [8] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*, 2nd. ed., Berlin, Springer, 1954.
- [9] J. L. Synge, The geometry of space-time, in C. Cattaneo, ed., *Vedute e Problemi Attuali in Relatività Generale, Lectures given at Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Sestriere, Italy, 1958*, pp. 189-200, Reprint Springer-Verlag, 2011.

- [10] T. B. Bahder, Navigation in Curved Space-time, *American Journal of Physics*, 69, 315, 2001.
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, 1972.
- [12] K. C. Ho, Y. T. Chan, Solution and Performance Analysis of Geolocation by TDOA, *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 29, No. 4, 1993.
- [13] T. Sathyan, Passive Geolocation and Tracking of an Unknown Number of Emitters *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 42, No 2, 2006.
- [14] N. Ashby, Relativity in the Global Positioning System, *Living Rev. Relativity*, 6, (1), pp. 1-42, 2003.
- [15] D. L. Adamy, *EW 102: A Second Course in Electronic Warfare*, Boston, Artech House Radar Library, Horizon House Pub. Inc., 2004.
- [16] D. Adamy, *EW 101: A First Course in Electronic Warfare*, Boston, Artech House Radar Library, Artech House Inc., 2001.
- [17] T. A. Benson, *Geolocation of an Electromagnetic Emitter Using a Cyclostationary Time Difference of Arrival Technique*, (Master's Thesis), Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1992.
- [18] R. Kaune, D. Mušicki, W. Koch, On Passive Emitter Tracking in Sensor Networks, Sensor Fusion and its Applications, Ciza Thomas (Ed.), ISBN: 978-953-307-101-5, InTech, 2010. Disponible en: <http://www.intechopen.com/books/sensor-fusion-and-its-applications/on-passive-emitter-tracking-in-sensornetworks>
- [19] G. Høye, Analyses of the Geolocation Accuracy That Can Be Obtained from Shipborne Sensors by Use of Time Difference of Arrival (TDOA), Scanphase, and Angle of Arrival (AOA) Measurements, *FFI-rapport 2010/00737*, (Technical Report), Forsvarets forskningsinstitutt/Norwegian Defence Research Establishment (FFI), 2010.
- [20] D. J. Torrieri, Statistical Theory of Passive Location Systems, *REPORT NUMBER CM/CCM-83-1*, (Technical Report), U.S. Army Materiel Development and Readiness Command, Countermeasures/Counter-countermeasures Center Adelphi, MD 20783, 1983.

- [21] H. H. Loomis Jr., *Geolocation of Electromagnetic Emitters*, Naval Postgraduate School Report NPS-EC-00-003, Monterey, California, 1999. Revised: December 2016.
- [22] F. Guo, Y. Fan, Y. Zhou, C. Xhou, Q. Li, *Space Electronic Reconnaissance: Localization Theories and Methods*, Singapore, John Wiley & Sons, Pte Ltd. Published, 2014.
- [23] C. Audoin, B. Guinot, *The Measurement of Time: Time, Frequency and the Atomic Clock*, Cambridge University Press, 2001.
- [24] G. Seeber, *Satellite Geodesy*, 3rd. ed., Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003.
- [25] P. Chesnut, Emitter Location Accuracy using TDOA and Differential Doppler, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.18, No. 2, pp. 214-218, 1982.
- [26] A. D. Stewart, *Comparing Time-Based and Hybrid Time-Based/Frequency Based Multi-Platform Geo-Location Systems*, (Master's Thesis), Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1997.
- [27] M. T. Grabbe and B. M. Hamschin, Geo-Location Using Direction Finding Angles, *Johns Hopkins Apl Technical Digest*, Vol. 262 31, No 3, 2013.
- [28] D. Ohm, *Kinematic and Cyclostationary Parameter Estimation for Co-Channel Emitter Location Applications*, (Tesis Doctoral), School of Electrical Engineering and Computer Science, Oregon State University, Corvallis, Oregon, 2009.
- [29] K. N. Hale, *Expanding the Use of Time/Frequency Difference of Arrival Geolocation in the Department of Defense*, (Doctoral degree dissertation), Pardee Rand Graduate School, RAND Corporation, Santa Monica, California, 2012.
- [30] M. C. Rodríguez Teijeiro, *Geolocalizaciones Newtoniana y Postnewtoniana Mediante la Técnica TDOA: el Efecto "Time-delay" de Shapiro*, (Tesis doctoral), Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, 2011.
- [31] S. Kopeikin, M. Efroimsky, G. Kaplan, *Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System*, Wiley, 2011.
- [32] R. Resnick, *Introduction to Special Relativity*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

- [33] P. Teyssandier, C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet, A Universal Tool for Determining the Time Delay and the Frequency Shift of Light: Synge's World function, en H. Dittus, C. Lammerzahn, S. G. Turyshev (Editores), *Lasers, Clocks and Drag-Free Control*, pp. 153-180. Springer, Berlín, 2008.
- [34] C.J.S. Clarke (originator), Synge world function, *Encyclopedia of Mathematics*. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Synge_world_function&oldid=18235
- [35] J.M. Gambi, P. Romero, A. Sanmiguel, F. Vicente, Fermi coordinate transformation under base-line change in relativistic celestial mechanics, *Int. J. Theor. Phys.*, Vol.30, pp. 10971116, 1991.
- [36] F. De Felice, C.J.S. Clarke, *Relativity on curved manifolds*, Cambridge University Press, 1990.
- [37] N. Ashby, The Sagnac Effect in the Global Positioning System, en G. Rizzi, M. L. Ruggiero (Editores), *Relativity in Rotating Frames: Relativistic Physics in Rotating Reference Frames*, pp. 11-28. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2004.
- [38] *IAU Resolution on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models*, U.S. Naval Observatory, Washington D.C. 20392, 2005.
- [39] F. De Felice, D. Bini, *Classical measurements in curved space times*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2010.
- [40] E. Poisson, A. Pound, I. Vega, The Motion of Point Particles in Curved Spacetime *Living Rev. Relativity*, 14, (7), 2011.
- [41] K. Lanczos, Über die Rotverschiebung in der de Sitterschen Welt (On the Redshift in the de Sitter Universe), *Z. Physik*, 17, pp. 168, 1923c.
- [42] J. V. Narlikar, Spectral Shifts in General Relativity, *American Journal of Physics*, 62, 10, 1994.
- [43] O. Montenbruck, E. S. Gill, *Satellite Orbits*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [44] M. H. Soffel, *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989, ch. 5.

- [45] J. M. Gambi, M. C. Rodríguez-Teijeiro, M. L. García del Pino, The Post-Newtonian Geolocation Problem by TDOA, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2010*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, p. 489, 2012.
- [46] T. B. Bahder, *Clock Synchronization and Navigation in the Vicinity of the Earth*, Nova Science Pub. Inc., 2008.
- [47] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [48] J. M. Gambi, M. C. Rodríguez Teijeiro, M. L. García del Pino, M. Salas, Shapiro time-delay within the geolocation problem by TDOA, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.47, No. 3, pp. 1948-1962, 2011.
- [49] J. M. Gambi, J. Clares, M. L. García del Pino, FDOA post-Newtonian Equations for the Location of Passive Emitters Placed in the Vicinity of the Earth, *Aerospace Science and Technology*, Vol.46, pp. 137-145, 2015.
- [50] J. M. Gambi, M. C. Rodríguez Teijeiro, M. L. García del Pino, Newtonian and post-Newtonian Pasive Geolocation by TDOA, *Aerospace Science and Technology*, Vol.51, pp. 18-25, 2016.
- [51] J. M. Gambi, M. M. Tung, J. Clares, M. L. García del Pino, Post-Newtonian Effects in Geolocation by FDOA, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2014*, Springer, 2016.
- [52] J. Zhang, K. Zhang, R. Grenfell, R. Deakin, On the Relativistic Doppler Effect for Precise Velocity Determination using GPS, *Journal of Geodesy*, Vol.80, pp. 104-110, 2006.
- [53] J. Zhang, *Precise Velocity and Acceleration Determination Using a Standalone GPS Receiver in Real Time*, (Tesis doctoral) Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne, Australia, 2007.
- [54] L. Combrinck, General Relativity Space Geodesy, en G. Xu (Ed.), *Sciences of Geodesy-II*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [55] G. Strang, K. Borre, *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, USA, 1997.
- [56] J. de Burgos, *Álgebra Lineal*, McGraw-Hill, Madrid, 1993.

- [57] J.M. Gambi, M. M. Tung, M. L. García del Pino, J. Clares, FDOA Determination of Velocities and Emission Frequencies of Passive Radiotransmitters in Space, aceptado para su publicación en *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2016*, Springer, 2018.
- [58] E. Hernández, *Álgebra Lineal y Geometría*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Delaware, E.U.A., 1994.
- [59] K. C. Ho, Y. T. Chan, Geolocation of A Known Altitude Object from TDOA and FDOA Measurements, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, No. 3, 1997.
- [60] D. Koks, Numerical Calculations for Passive Geolocation Scenarios, *Australian Government Department of Defence, DSTORR0319*, (Research Report), Defence Science and Technology Organisation, Edinburgh, SA 5111, Australia, 2007.
- [61] D. J. Torrieri, Statistical Theory of Passive Location Systems, *IEEE Trans. Aero. Elect. Syst.*, pp. 197, 1984.
- [62] D. Wright, L. Grego, L. Gronlund, *The Physics of Space Security, A Reference Manual*, American Academy of Arts and Sciences, Cambridge, Massachusetts, 2005.
- [63] A. Weintrit, The Concept of Time in Navigation, *TransNav*, 11, 2, 2017. DOI: 10.12716/1001.11.02.01
- [64] J. M. Gambi, M. L. García del Pino, A Satellite-to-Satellite Laser Tracking Solution Within the Post-Newtonian Model of the Earth Outer Space, *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012*, Springer, p. 347, 2014.
- [65] J. M. Gambi, M. L. Garcia del Pino, M. C. Rodriguez-Teijeiro, Non-linear post-Newtonian Equations for the Motion of Designated Targets with Respect to Space Based APT Laser Systems, in: *19th European Conference on Mathematics for Industry, 2016*, p. 24.
- [66] J. M. Gambi, M. L. Garcia del Pino, J. Gschwindl, E. B. Weinmüller, Post-Newtonian Corrections to the Newtonian Predictions for the Motion of Designated Targets with Respect to Space Based APT Laser Systems, in: *19th European Conference on Mathematics for Industry, 2016*, p. 25.

- [67] J. M. Gambi, M. L. García del Pino, Autonomous Shooting at Middle Size Space Debris Objects from Space-based APT Laser Systems, *Acta Astronautica*, vol. 131, pp. 83-91, 2017.
- [68] J. M. Gambi, M. L. García del Pino, J. Gschwindl, E. B. Weinmüller, Post-Newtonian Equations of Motion for LEO Debris Objects and Space-based Acquisition, Pointing and Tracking Laser Systems, *Acta Astronautica*, vol. 141, pp. 132-142, 2017.